Schwingungen

→ lineare DGL mit Konstanten Koeffizienten $y = y(x)$

$$a_n \frac{dy^{(n)}}{dx^n} + a_{n-1} \frac{dy^{(n-1)}}{dx^{n-1}} + \dots a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x)$$

1.) finde allg. Lösung der homogenen DGL $(f(x)=0)$

Ansatz: $y(x) = e^{\mu x}$; $\mu \in \mathbb{C}$

$$\frac{dy^{(n)}}{dx^n} = \mu^n e^{\mu x}$$

⇒ Polynom n ten Grades

$$a_n \mu^n + a_{n-1}\mu^{n-1} + \dots a_1 \mu + a_0 = 0$$

⇒ μ's = Nullstellen : $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$

Annahme: alle μ_i rein unterschiedlich

$$y_h(x) = c_1 e^{\mu_1 x} + c_2 e^{\mu_2 x} + \dots + c_n e^{\mu_n x}$$

↑ homogen $c_1 \dots c_n$ Integrationskonstanten, aus n Anfangsbedingungen, i.A. komplex

Beispiel: Der gedämpfte harmonische Oszillator 1D

Newton: $m\ddot{y}(t) + \lambda \dot{y}(t) + k y(t) = 0$

$k, \lambda, m = \text{const}$ geschwindigkeitsabhängige Reibung

Ansatz: $y(t) = e^{\mu t}$; $\dot{y} = \mu e^{\mu t}$; $\ddot{y} = \mu^2 e^{\mu t}$

→ Newton → $m\mu^2 + \lambda \mu + k = 0 \Leftrightarrow \mu^2 + \frac{\lambda}{m}\mu + \frac{k}{m} = 0$

⇔ $\mu_{1,2} = -\frac{\lambda}{2m} \pm \sqrt{\frac{\lambda^2}{4m^2} - \frac{k}{m}}$ $\quad\Big|\quad \left(\mu + \frac{\lambda}{2m}\right)^2 = -\frac{k}{m} + \frac{\lambda^2}{4m^2}$

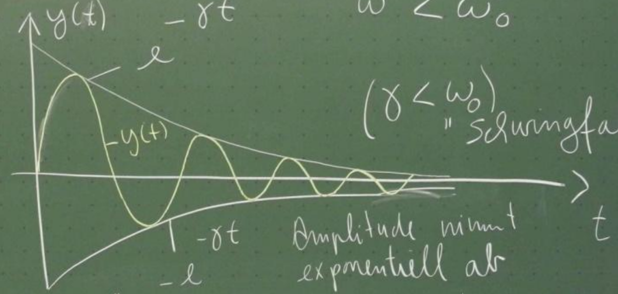
\# keine Dämpfung $\lambda = 0$: $\mu_{1,2} = \pm i\omega_0$ mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ Grundfrequenz

→ $y(t) = c_1 e^{i\omega_0 t} + c_2 e^{-i\omega_0 t}$ reine Schwingung

\# schwache Dämpfung (λ klein), $\gamma \equiv \frac{\lambda}{2m}$; $(\gamma < \omega_0)$

$$\mu_{1,2} = -\frac{\lambda}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{\lambda^2}{4m^2}} = -\gamma \pm i\underbrace{\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}_{\omega} = -\gamma \pm i\omega$$

$$\to y(t) = \underbrace{e^{-\gamma t}}_{\text{exponentielle Dämpfung}} \underbrace{\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right)}_{\text{harmonische Schwingung mit } \omega < \omega_0}$$



Amplitude nimmt exponentiell ab

$(\gamma < \omega_0)$ "Schwingfall"

* Starke Dämpfung (λ groß / Wurzeln reell)

$$\mu_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} \in \mathbb{R} \qquad (\gamma > \omega_0)$$

$$\to y(t) = \underbrace{e^{-\gamma t}}_{\text{exponentielle Dämpfung}} \underbrace{\left(C_1 e^{\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\,t} + C_2 e^{-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2}\,t}\right)}_{\text{keine Oszillation}}$$

"Kriechfall" $(\gamma > \omega_0)$

* $\gamma = \omega_0$? Nullstellen entartet, $\mu_1 = \mu_2 = -\gamma$

allgemein: Das Polynom n.ter Ordnung in μ habe m verschiedene Nullstellen μ_i mit Vielfachheit k_i $\quad \sum_{i=1}^{m} k_i = n$

Dann ist die allgemeine Lösung der homogenen DGL eine Linearkombination der n Funktionen

$$e^{\mu_1 x},\; x e^{\mu_1 x},\; \ldots,\; x^{k_1-1} e^{\mu_1 x}$$
$$e^{\mu_2 x},\; x e^{\mu_2 x},\; \ldots,\; x^{k_2-1} e^{\mu_2 x}$$
$$\vdots$$
$$e^{\mu_m x},\; x e^{\mu_m x},\; \ldots,\; x^{k_m-1} e^{\mu_m x}$$

$\gamma = \omega_0$ "aperiodische Grenzfall"

Funktionen: $e^{-\gamma t}, \; t e^{-\gamma t}$

$$y(t) = C_1 e^{-\gamma t} + C_2 t e^{-\gamma t} = \underbrace{e^{-\gamma t}}_{\text{exp. Dämpfung}} (C_1 + C_2 t)$$

keine Schwingung, geht schneller zu Null als Kriechfall

Erzwungene Schwingung, Resonanz

Newton $m\ddot{y}(t) + \lambda \dot{y}(t) + k y(t) = F_e(t)$

$F_e(t)$: externe zeitabhängige Kraft

inhomogene DGL mit konstanten Koeffizienten

$$\Leftrightarrow \ddot{y} + \frac{\lambda}{m}\dot{y} + \frac{k}{m} y = \frac{F_e(t)}{m} \qquad (3)$$

allg Lsg = allg Lsg der homogenen DGL (bereits diskutiert) + eine Lösung der inhomogenen DGL

Spezialfall: Sei $F_e(t) = F_0 e^{i\omega_E t}$; $F_0 = \text{const}$

periodische, äußere Kraft mit ω_E; $\omega_E = \text{const}$

Lösungsansatz: $y(t) = C e^{i\omega_E t}$; $C \in \mathbb{C}$

In (3) eingesetzt: $\left(-\omega_E^2 + \frac{\lambda}{m} i\omega_E + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2}\right) C = \frac{F_0}{m}$

$\dot{y}(t) = C i\omega_E e^{i\omega_E t}$

$\ddot{y}(t) = C(-\omega_E^2) e^{i\omega_E t}$

$\Rightarrow$ bestimme Amplitude $C = \frac{F_0}{m} \underbrace{\frac{1}{-\omega_E^2 + \frac{\lambda}{m} i\omega_E + \omega_0^2}} = \frac{F_0}{m} \cdot A$; $A \in \mathbb{C}$

Betrag

schreibe $A = |A| e^{i\delta}$ ← Phase

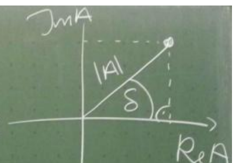
$|A| = \sqrt{A A^*} = \left(\underbrace{\frac{1}{-\omega_E^2 + \frac{\lambda}{m} i\omega_E + \omega_0^2}}_{\text{"}a+b\text{"}} \cdot \underbrace{\frac{1}{-\omega_E^2 - \frac{\lambda}{m} i\omega_E + \omega_0^2}}_{\text{"}a-b\text{"}} \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{\underbrace{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\gamma^2\omega_E^2}_{\text{"}a^2-b\text{"}}}}$

$\gamma = \frac{\lambda}{2m}$

$\tan\delta = \frac{\operatorname{Im} A}{\operatorname{Re} A}$

$A = \frac{AA^*}{A^*} = \frac{|A|^2}{A^*} = \left(\frac{1}{(\omega_0^2 - \omega_E^2)^2 + 4\gamma^2\omega_E^2} \right) \left(\underbrace{\omega_0^2 - \omega_E^2}_{\to \operatorname{Re} A} \underbrace{- 2\gamma i\omega_E}_{\to \operatorname{Im} A} \right)$

$\Rightarrow \tan\delta = \frac{-2\gamma\omega_E}{\omega_0^2 - \omega_E^2}$



Spezielle Lösung: $y(t) = \frac{F_0}{m} A e^{i\omega_E t}$

$= \frac{F_0}{m} |A| e^{i\omega_E t + i\delta}$

$A = \operatorname{Re} A + i \operatorname{Im} A$

$|A|, \delta$ sind Funktionen von $\omega_0, \gamma, \omega_E$

Grenzfälle: # $\omega_E \to \infty$

$\Rightarrow \delta = \pi$ da $\operatorname{Re} A < 0$; F_e und Schwingung im Gegentakt

$|A| \sim \frac{1}{\omega_E^2}$ wird beliebig klein

$\omega_E \to 0$ (statischer Grenzfall): $\delta \to 0$; $|A| \to \frac{1}{\omega_0^2}$

$y(t) = \frac{F_0}{k} e^{i\omega_E t}$

$\omega_E = \omega_0$ "Resonanz"

$\operatorname{Re} A = 0$; $\operatorname{Im} A < 0$; $\delta = -\frac{\pi}{2}$

Diskussion $|A|$ als Fkt von ω_E

$\frac{d|A|}{d\omega_E} = \left(-\frac{1}{2}\right) \frac{1}{\sqrt{(*)}^3} \left(2(\omega_0^2 - \omega_E^2)(-2\omega_E) + 8\gamma^2\omega_E \right) \stackrel{!}{=} 0$

$\Rightarrow \omega_E = 0 \quad \vee \quad 4(\omega_0^2 - \omega_E^2) = 8\gamma^2$

$\Leftrightarrow \omega_0^2 - \omega_E^2 = 2\gamma^2$

Resonanzfrequenz $\omega_E = \omega_R = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}$

$|A_{max}| = |A(\omega_E = \omega_R)|$

$= \left((\cancel{\omega_0^2} - \cancel{\omega_0^2} + 2\gamma^2)^2 + 4\gamma^2(\omega_0^2 - 2\gamma^2) \right)^{-1/2} = \left(4\gamma^4 + 4\gamma^2\omega_0^2 - 8\gamma^4 \right)^{-1/2}$

$= \frac{1}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}}$