Trägheitstensor

$\vec{L} = \underline{I}\ \vec{\omega}$

$\underline{I} = \underline{I}^T$

Hauptträgheitsachsen: hier gilt $\vec{L} \parallel \vec{\omega}$

In dieser Basis muß dann $\underline{I}$ diagonal sein.

-> Auffinden derjenigen Basis, in welcher $\underline{I}$ diagonal ist -> Eigenwertproblem

$$(\underline{I} - I_D)\,\vec{\omega}\,' = 0$$

Einschub: Momente einer Massenverteilung

gegeben: Dichte $\rho(\vec{r})$; $\vec{r} = (\underset{x}{x_1}, \underset{y}{x_2}, \underset{z}{x_3})$

Gesamtmasse $M = \int d^3r\, \rho(\vec{r})$

Schwerpunkt $\vec{r}_{SP} = \frac{1}{M}\int d^3r\, \vec{r}\, \rho(\vec{r})$

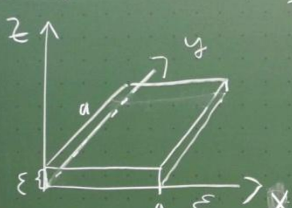
Trägheitstensor $I_{ij} = \int d^3r\, \rho(\vec{r})\left(\vec{r}^{\,2}\delta_{ij} - x_i x_j\right)$
$i,j = 1,2,3$
$= I_{ji}$ (symmetrisch)

$$I_{11} = I_{xx} = \int d^3r\, \rho(\vec{r})\left(x^2+y^2+z^2-x^2\right) = \int d^3r\, \rho(\vec{r})\left(y^2+z^2\right)$$

$$I_{12} = I_{xy} = \int d^3r\, \rho(\vec{r})\,(-xy) \quad \text{etc}$$

Beispiel: Trägheitstensor + Hauptträgheitsachsen eines sehr dünnen Quaders

Dicke $\varepsilon \ll a$
Dichte $\rho = \text{const}$



Masse $M = \rho\cdot V = \rho a^2 \varepsilon$

$$I_{xx} = \rho \int_0^\varepsilon dz \int_0^a dx \int_0^a dy\,\left(y^2+z^2\right)$$

$$= \rho\cdot a \int_0^\varepsilon dz\left(\frac{a^3}{3} + z^2\cdot a\right) = \rho a\left(\frac{a^3}{3}\cdot\varepsilon + \frac{\varepsilon^3}{3}\cdot a\right)$$

$$\simeq \rho\,\frac{a^4}{3}\cdot\varepsilon = M\frac{a^2}{3}$$

$$I_{yy} = \rho \int_0^\varepsilon dz \int_0^a dx \int_0^a dy\,\left(x^2+z^2\right) = I_{xx}$$

$$I_{zz} = \rho \int_0^\varepsilon dz \int_0^a dx \int_0^a dy\,\left(x^2+y^2\right) = 2\,I_{xx} = \frac{2}{3}Ma^2$$

$$I_{xy} = -\rho \int_0^\varepsilon dz \int_0^a dx \int_0^a dy\; xy = -\varepsilon\rho\int_0^a dx\, x\,\frac{a^2}{2} = -\frac{\varepsilon\rho a^2}{2}\,\frac{a^2}{2} = -\frac{Ma^2}{4}$$

$$I_{xz} = -\rho \int_0^\varepsilon dz \int_0^a dx \int_0^a dy\; x\,z \;\propto \rho\,\varepsilon^2 \approx 0$$

$I_{xz} = I_{yz}$

$$\Rightarrow \underline{I} = \begin{pmatrix} \frac{Ma^2}{3} & -\frac{Ma^2}{4} & 0 \\ -\frac{Ma^2}{4} & \frac{Ma^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3}Ma^2 \end{pmatrix}$$

Hauptträgheitsmomente (Eigenwerte)

— " — achsen (Eigenvektoren)

$$\det(\underline{I} - \lambda \mathbb{1}) = 0 \qquad \mathbb{1} = \text{Einheitsmatrix}$$

$$\mathbb{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$I_0 = Ma^2$

$$\begin{vmatrix} \frac{I_0}{3} - \lambda & -\frac{I_0}{4} & 0 \\ -\frac{I_0}{4} & \frac{I_0}{3} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} I_0 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} I_0 - \lambda\right)\left[\left(\frac{I_0}{3} - \lambda\right)^2 - \frac{I_0^2}{16}\right] = 0$$

Polynom 3. Grades → i.A. 3 Lösungen

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} I_0 - \lambda\right) \underbrace{\left[\frac{I_0^2}{9} - \frac{2}{3} I_0 \lambda + \lambda^2 - \frac{I_0^2}{16}\right]}_{\text{quadratische Gleichung}} = 0$$

3 Lösungen für λ: $\to I_{a,b,c}$

$$I_a = \frac{I_0}{12}, \quad I_b = \frac{I_0 \cdot 7}{12}, \quad I_c = I_0 \cdot \frac{2}{3}$$

Bestimme nun Eigenvektoren, 3 Stück, $\vec{\omega}_{a,b,c}$

so daß gilt:

$$\underline{I}\,\vec{\omega}_a = I_a \vec{\omega}_a$$
$$\underline{I}\,\vec{\omega}_b = I_b \vec{\omega}_b$$
$$\underline{I}\,\vec{\omega}_c = I_c \vec{\omega}_c$$

$$\vec{\omega}_a = \begin{pmatrix} \omega_{ax} \\ \omega_{ay} \\ \omega_{az} \end{pmatrix}$$

$\underline{I}\,\vec{\omega}_a = I_a \vec{\omega}_a \Leftrightarrow$

$$\frac{1}{3} I_0 \omega_{ax} - \frac{1}{4} I_0 \omega_{ay} + 0 = \frac{I_0}{12} \omega_{ax}$$
$$\wedge \; -\frac{1}{4} I_0 \omega_{ax} + \frac{1}{3} I_0 \omega_{ay} + 0 = \frac{I_0}{12} \omega_{ay}$$
$$\wedge \; 0 + 0 + \underbrace{\frac{2}{3} I_0 \omega_{az} = \frac{I_0}{12} \omega_{az}}_{\text{nur erfüllt für } \omega_{az} = 0}$$

außerdem $\omega_{ax} = \omega_{ay} \Rightarrow \vec{\omega}_a \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

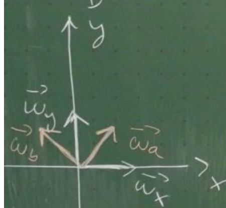
normiert: $\vec{\omega}_a = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

analog (ohne Beweis): $\vec{\omega}_b = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{\omega}_c = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

O: Drehmatrix $\quad O O^T = \mathbb{1}$

$$O = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad \underline{I}_D = \begin{pmatrix} I_a & 0 & 0 \\ 0 & I_b & 0 \\ 0 & 0 & I_c \end{pmatrix}$$

$$\underline{I}_D = O^T \underline{I}\, O$$



$\vec{\omega}_z = \vec{\omega}_c$

$\vec{\omega}_{a,b}$ sind gegenüber $\vec{\omega}_{x,y}$ um 45° gedreht

$\vec{\omega}_a \parallel \vec{L}$

$\vec{\omega}_b \parallel \vec{L}$

$\vec{\omega}_c \parallel \vec{L}$

Differentialgleichungen, allg. Schwingungen

allg. gewöhnliche DGL von einer Funktion $y(x)$ mit einer Variablen x:

$$F(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n)}(x)) = 0 \quad (1)$$

$y' = \frac{dy}{dx}$ etc

Ordnung der DGL: höchste vorkommende Ableitung, hier n.

Ist die DGL darstellbar als Polynom in $y, y', \dots y^{(n)}$, so heißt Grad der DGL die höchste vorkommende Potenz von $y, y', \dots y^{(n)}$ pro Term. Beispiel A: $y'''(x) + y(x)y'(x) - x^2 y(x) = 5$

A hat Ordnung 3, Grad 2

Lineare DGL mit konstanten Koeffizienten

(Lösung systematisch auffindbar; Problem äquivalent dem Auffinden von Nullstellen eines Polynoms)

n. Ordnung $y = y(x)$

$$a_n \frac{d^{(n)}y}{dx^n} + a_{n-1} \frac{d^{(n-1)}y}{dx^{n-1}} + \dots a_1 \frac{dy}{dx} + a_0 y = f(x) \quad (1)$$

linear: Sei $y_h(x)$ Lsg der homogenen DGL d.h., die DGL wird für $f(x)=0$ gelöst und $y_{sp}(x)$ eine Lsg der DGL (1), so lautet die allgemeine Lsg der DGL $y(x) = y_h(x) + y_{spez}(x)$

Ist der Grad 1, so ist die DGL linear.

homogen: Kommt in (1) ein Summand vor, welcher nicht x-abhängig ist, so heißt die DGL inhomogen, sonst homogen.

Beispiel A ist inhomogen

Lösung von (1): alle n-mal stetig differenzierbaren Funktionen $y(x)$. Die allgemeine Lösung enthält n freie Integrationskonstanten.

$\rightarrow$ Anfangsbedingungen, welche die spezielle Lösung festlegen.

Beispiel B: Bewegungsgleichung des harmonischen Oszillators

$\ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0$ 2. Ordnung, 1. Grades (linear) homogen, konstante Koeffizienten

Lösung der homogenen DGL:

Ansatz: $y(x) = e^{\mu x}$; $\mu \in \mathbb{C}$

$y'(x) = \mu e^{\mu x}$

$\dots \frac{d^{(n)}y}{dx^n} = \mu^n e^{\mu x}$

$\rightarrow$ in (1) mit $f(x) = 0$

$$a_n \mu^n e^{\mu x} + a_{n-1} \mu^{n-1} e^{\mu x} + \dots a_1 \mu e^{\mu x} + a_0 e^{\mu x} = 0$$

$$\Leftrightarrow a_n \mu^n + a_{n-1} \mu^{n-1} + \dots a_1 \mu + a_0 = 0 \quad (2)$$

Polynom n-ten Grades in μ $\rightarrow$ genau n-Nullstellen, i.A. komplex