6. Übungsblatt zur Physik I

Prof. Dr. G. Hiller, Prof. Dr. S. Khan

Abgabe: Bis Dienstag, den 21. November 2017 12:00 Uhr WS 2017/18

Aufgabe 1 : Vorbeiflug am Jupiter (4 Punkte)

Am 5. März 1979, 18 Monate nach ihrem Start, flog die Raumsonde Voyager 1 am Planeten Jupiter vorbei. Sie ist heute mit über 140 AE (Astronomischen Einheiten) das am weitesten von der Erde entfernte Objekt irdischen Ursprungs. Betrachten Sie Jupiter als Zentralgestirn mit Masse $M = 1{,}9 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg}$ und vernachlässigen Sie den Einfluss der Sonne. Die Geschwindigkeit der Sonde betrug bei großem Abstand (Näherung $r \to \infty$) $v = 10{,}8\,\mathrm{km/s}$. Der minimale Abstand zum Mittelpunkt des Planeten betrug $r_{\mathrm{min}} = 3{,}4 \cdot 10^5\,\mathrm{km}$.

(a) Drücken Sie die Exzentrizität ϵ der hyperbolischen Bahn durch v, r_{min} und M aus. Anmerkung: Der Bahndrehimpuls ist durch r_{min} und die dort erreichte maximale Geschwindigkeit v_{max} gegeben.

(b) Berechnen Sie die Exzentrizität der Bahn und daraus den Winkel, um den die Sonde vom Planeten insgesamt abgelenkt wurde.

Aufgabe 2 : Swing-by-Manöver (6 Punkte)

Viele interplanetare Raumfahrtmissionen wurden erst durch die Entwicklung des *swing-by*-Manövers ermöglicht. Hierbei wird auf eine Raumsonde, die einen Planeten passiert, im Ruhesystem der Sonne kinetische Energie übertragen. Außerhalb eines sphärischen Einflussbereichs des Planeten soll nur der Einfluss der Sonne, innerhalb dieses Bereichs nur die Zentralkraft des Planeten betrachtet werden. Im Folgenden wird die Norm eines Vektors $\vec{a}$ mit a bezeichnet.

(a) Beim Radius r_{E} , der den Einflussbereich definiert, sei der Betrag der Gravitationskraft von Sonne und Planet gleich. Berechnen Sie r_{E} für Jupiter (Bahnradius $7{,}8 \cdot 10^8\,\mathrm{km}$, Jupitermasse $1{,}9 \cdot 10^{27}\,\mathrm{kg}$, Sonnenmasse $2{,}0 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$). Berechnen Sie ferner die Geschwindigkeit u_{P} des Planeten im Ruhesystem der Sonne (heliozentrisches System).

(b) Die Geschwindigkeiten der Sonde im heliozentrischen System seien $\vec{u}_1$ bzw. $\vec{u}_2$ vor und nach dem Manöver, relativ zu Jupiter seien sie $\vec{v}_1$ bzw. $\vec{v}_2$. Die Winkel der Vektoren $\vec{u}_1$ und $\vec{u}_2$ relativ zu $\vec{u}_{\mathrm{P}}$ seien β_1 und β_2 . Die Winkel der Vektoren $\vec{v}_1$ und $\vec{v}_2$ relativ zu $\vec{u}_{\mathrm{P}}$ seien γ_1 und γ_2 (eine Skizze kann hilfreich sein). Drücken Sie v_1 durch u_1, u_{P} und β_1 aus. Drücken Sie ferner u_2 durch v_2, u_{P} und γ_2 aus. Warum gilt $v_1 = v_2 =: v$ im Abstand r_{E} von Jupiter?

(c) Verwenden Sie nun die Daten aus Aufgabe 1. Wie groß waren die Winkel β_1 und γ_1 vor dem Manöver, wenn die Geschwindigkeit u_1 im heliozentrischen System $12{,}8\,\mathrm{km/s}$ betrug? Wie groß war der Winkel γ_2? Berechnen Sie hieraus die Geschwindigkeit u_2 nach dem Manöver und erklären Sie in Worten, wieso eine Raumsonde beim Vorbeiflug an einem Planeten Energie gewinnen kann.

Aufgabe 3 : Der ϵ-Tensor (4 Punkte)

Im Folgenden wird die „Einsteinsche Summenkonvention“ verwendet. Diese besagt, dass über mehrfach auftretende Indices innerhalb eines Produktes summiert wird. Damit kann zum Beispiel das Standardskalarprodukt zweier Vektoren $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ des $\mathbb{R}^3$ geschrieben werden als $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i b_i$, wohingegen mit $a_i + b_i$ die i-te Komponente des Vektors $\vec{a} + \vec{b}$ gemeint ist.

Gegeben ist nun der ϵ-Tensor mit folgenden Eigenschaften:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } (i,j,k) \text{ zyklische Permutation von } (1,2,3) \\ -1, & \text{wenn } (i,j,k) \text{ antizyklische Permutation von } (1,2,3) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases} \quad .$$

Außerdem ist das Kronecker-Delta δ mit folgenden Eigenschaften gegeben:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{wenn } i = j \\ 0, & \text{wenn } i \neq j \end{cases} \quad .$$

Hierbei durchlaufen die Indices die Werte $1, 2$ und 3.

(a) Schreiben Sie alle nicht verschwindenden Komponenten von ϵ_{ijk} auf.

(b) Zeigen Sie, dass man das Kreuzprodukt wie folgt darstellen kann:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \epsilon_{ijk} a_j b_k \hat{e}_i, \tag{1}$$

wobei $\hat{e}_i$ den i-ten Standardbasisvektor des $\mathbb{R}^3$ bezeichnet.

(c) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix}. \tag{2}$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst die Determinanten

$$\begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{i2} & \delta_{i3} \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \delta_{j3} \\ \delta_{k1} & \delta_{k2} & \delta_{k3} \end{vmatrix} \text{ und } \begin{vmatrix} \delta_{i1} & \delta_{j1} & \delta_{k1} \\ \delta_{i2} & \delta_{j2} & \delta_{k2} \\ \delta_{i3} & \delta_{j3} & \delta_{k3} \end{vmatrix}. \tag{3}$$

(d) Berechnen Sie

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \epsilon_{ijk}. \tag{4}$$

(e) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}. \tag{5}$$

(f) Zeigen Sie, dass gilt:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijn} = 2\delta_{kn}. \tag{6}$$

(g) Berechnen Sie:

$$\epsilon_{ijk}\epsilon_{ijk}. \tag{7}$$

(h) Zeigen Sie mit Hilfe der vorherigen Aufgabenteile, dass gilt:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a} \tag{8}$$

sowie

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}). \tag{9}$$

„bac-cab Regel“

Aufgabe 4 : Der Satz von Stokes (6 Punkte)

Einleitung: In dieser Aufgabe sei $\vec{f} : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine C^1-Funktion (d.h. stetig differenzierbar) und $D \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet. Außerdem wird mit $A \subset D$ eine zusammenhängende Fläche mit Rand ∂A bezeichnet.
Die Fläche A sei orientierbar, d.h. es existiere zu jedem Punkt der Fläche ein normierter Einheitsvektor $\vec{n}$, welcher senkrecht auf der Fläche steht mit $|\vec{n}| = 1$.
Eine Parametrisierung des Randes ∂A heißt positiv orientiert, wenn anschaulich gesprochen eine Person, die sich auf der Seite der Fläche befindet, zu der $\vec{n}$ zeigt und welche entlang der Randparametrisierung läuft, die Fläche immer zu ihrer Linken hat.

(a) Der Satz von Stokes besagt mit den Voraussetzungen der Einleitung:

$$\int\limits_{\partial A} \vec{f} \mathrm{d}\vec{r} = \int\limits_{A} (\nabla \times \vec{f}) \mathrm{d}\vec{A}, \ \mathrm{d}\vec{A} = \vec{n} \mathrm{d}A, \tag{10}$$

wobei ∂A in positiver Richtung durchlaufen werden soll. Zeigen Sie, dass der Satz von Stokes gilt.

Anleitung:

(i) Betrachten Sie zuerst als Fläche ein Rechteck mit den Seitenlängen Δx und Δy, welches in der x-y-Ebene liegt (Integrale sind von der Wahl des kartesischen Koordinatensystems unabhängig) und orientieren Sie das Rechteck so, dass $\vec{n}$ in die z-Richtung zeigt. Der Mittelpunkt dieses Rechtecks werde mit $(x_0, y_0, 0)$ bezeichnet. Fertigen Sie eine Skizze an.

(ii) Geben Sie eine Randparametrisierung an.

(iii) Berechnen Sie $\int\limits_{\partial A} \vec{f} \mathrm{d}\vec{r}$ und verwenden Sie für den vorkommenden Integranden eine Taylorentwicklung bis zur ersten Ordnung (Alternativ kann auch der Mittelwertsatz der Differentialrechnung verwendet werden).

(iv) Gehen Sie nun zu dem Grenzwert kleiner Seitenlängen Δx, Δy über.
Zwischenergebnis: Sie sollten nun zu $\int\limits_{\partial A} \vec{f} \mathrm{d}\vec{r} = (\nabla \times \vec{f})(x_0, y_0, 0) \vec{n} \Delta x \Delta y$ gelangt sein.

(v) Gehen Sie nun davon aus, dass die Fläche A beliebig gut durch Rechtecke R_i approximiert werden kann. Betrachten Sie nun die Summe der Linienintegrale $\int\limits_{\partial R_i} \vec{f} \mathrm{d}\vec{r}$ (Skizze mit Umlaufrichtungen der Ränder hilfreich!), verwenden Sie die vorherigen Aufgabenteile und gehen Sie anschließend zum Grenzwert infinitesimaler Rechtecke über, um den Satz von Stokes zu erhalten.

(b) Betrachten Sie die in Zylinderkoordinaten durch

$$A = \{\vec{r}(\rho, \phi, z) \in \mathbb{R}^3 | \frac{\rho}{z} = c; \rho > 0; h_1 \leq z \leq h_2; 0 \leq \phi \leq 2\pi\}$$

mit positiven Parametern c, h_1, h_2 definierte Kegelmantelfläche. Verifizieren Sie für das Vektorfeld $\vec{f}$ mit $\vec{f}(x, y, z) := (y, -z, -x)^{\mathrm{T}}$ den Satz von Stokes durch explizite Berechnung beider Seiten von (10).
Tipp für das Flächenintegral: Parametrisieren Sie die Fläche $\vec{A} = \vec{A}(\phi, z)$, so gilt für eine Orientierung „nach außen“: $\mathrm{d}\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial z}$, und für eine Orientierung „nach innen“: $\mathrm{d}\vec{A} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial z} \times \frac{\partial \vec{A}}{\partial \phi}$.