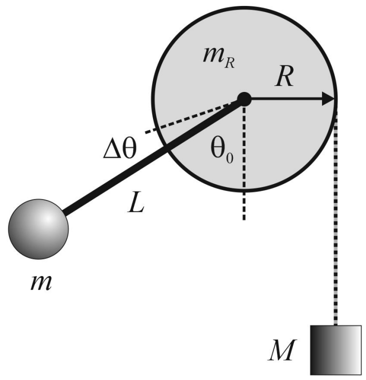
10. Übungsblatt zur Physik I

Prof. Dr. G. Hiller, Prof. Dr. S. Khan

Abgabe: Bis Dienstag, den 19. Dezember 2017 12:00 Uhr WS 2017/18

Aufgabe 1 : Asymmetrisches Pendel (5 Punkte)

Ein Pendel mit der Masse m an einer Stange der Länge L sei mit einer Rolle der Masse m_R und Radius R fest verbunden. Auf der Rolle sei ein Faden aufgewickelt, an dem eine zweite Masse M hängt (siehe Skizze). Die Masse der Stange und des Fadens sei vernachlässigbar.



(a) Geben Sie einen Ausdruck für die Summe der Drehmomente beim Gleichgewichtswinkel θ_0 und bei einem abweichenden Winkel $\theta_0 + \Delta\theta$ an.

(b) Stellen Sie die Bewegungsgleichung für eine Schwingung mit Auslenkung $\Delta\theta$ um die Ruhelage auf.

(c) Welchen Wert hat der Gleichgewichtswinkel für den Fall $m = M = 50$ g, $m_R = 20$ g, $R = 5$ cm und $L = 12$ cm.

(d) Geben Sie die Bewegungsgleichung in einer sinnvollen Näherung für kleine Auslenkungen an. Wie groß ist in dieser Näherung die Schwingungsdauer des Pendels mit den in (c) angegebenen Werten?

Aufgabe 2 : Gedämpfte Schwingung (5 Punkte)

Eine Masse $m = 5$ kg vollführt an einer Feder ungedämpfte Schwingungen mit der Periode $T_0 = 1$ s. Nach Einschalten einer geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung sinkt die Amplitude innerhalb von 10 vollständigen Oszillationen von 20 cm auf 10 cm.

(a) Wie groß sind die Federkonstante k und der Dämpfungskoeffizient $\gamma = \lambda/(2m)$ mit Dämpfungskonstante λ?

(b) Geben Sie die Bewegungsgleichung an. Welche Schwingungsdauer besitzt das gedämpfte System?

(c) Nach wie vielen Oszillationen ist die Amplitude von anfänglich 20 cm auf 2,5 cm abgesunken?

(d) Wie groß ist der Energieverlust pro Sekunde anfangs?

(e) Welche Güte besitzt das System?

Aufgabe 3 : Wellengleichung und Bezugssysteme (5 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $F(x,t) = F_0 \cos(\omega t - k x)$ die Wellengleichung

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right] F(x,t) = 0 \tag{26}$$

erfüllt. Was ist v und welche Bedingung ergibt sich für ω und k?

(b) Transformieren Sie die Wellengleichung (26) und $F(x,t)$ mit der Galilei-Transformation

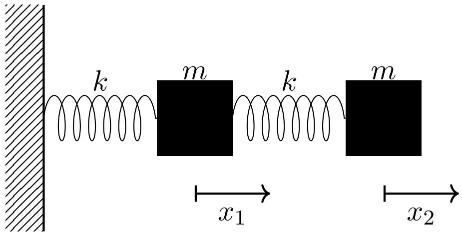
$$\begin{aligned} x' &= x - v\,t \\ t' &= t. \end{aligned}$$

Welche Differentialgleichung erfüllt die transformierte Funktion $\tilde{F}(x',t')$.
Hinweis:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t'} \\ \frac{\partial}{\partial t} &= \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} \end{aligned}$$

Aufgabe 4 : Gekoppelte Oszillatoren (5 Punkte)

Zwei Massen m seien horizontal über eine Feder miteinander verbunden. Die linke Masse ist nach links zusätzlich über eine Feder mit einer Wand verbunden. Die beiden Federn haben jeweils die Federkonstante k.



a) Stellen Sie die Bewegungsgleichung in Relativkoordinaten zur Ruhelage und damit die Differentialgleichungen für die beiden Massen auf.

b) Wählen Sie einen geeigneten Ansatz zum Lösen der Differentialgleichungen und führen Sie das Problem auf ein Eigenwertproblem mit der Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \tag{27}$$

zurück.

c) Berechnen Sie das charakteristische Polynom und damit die exakten Eigenwerte der Matrix. Bestimmen Sie aus diesen die Eigenfrequenzen des Systems. Zeigen Sie, dass mögliche (nicht normierte!) Eigenvektoren mit

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} -\sqrt{5}-1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{5}-1 \\ 2 \end{pmatrix} \tag{28}$$

gegeben sind.

d) Wie lautet die allgemeine Lösung des Systems?

e) Erklären Sie qualitativ den Unterschied zwischen den beiden Eigenmoden des Systems.