2.5 Materiewellen und Unschärferelation

Wellenfunktion

Wiederholung:
- **Teilchen werden durch ein Wellenpaket dargestellt und haben eine de-Broglie-Wellenlänge**
- **Teilchengeschwindigkeit entspricht der Gruppengeschwindigkeit der Welle**

$$\psi(x,t) = C_0 \cdot e^{i\cdot(\omega\cdot t - k\cdot x)} = C_0 \cdot e^{i\cdot(E\cdot t - p\cdot x)/\hbar} \qquad E_{kin} = \hbar\cdot\omega \qquad p = \hbar\cdot k \qquad v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{v}{2}$$

$$|\psi(x,t)|^2\,dx \quad \text{mit} \quad \int_{x=-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2\,dx = 1 \qquad v_g = \frac{d\omega}{dk} = v$$

Betragsquadrat der Wellenfunktion (·*dx*) ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zur Zeit t in [*x*,*x*+*dx*] zu finden. Der Determinismus wird zu Gunsten einer Wahrscheinlichkeitsinterpretation (Kopenhagener Deutung) aufgegeben.

Ein Wellenpaket enthält ein Spektrum von *k*-Werten (ein scharfer *k*-Wert erzeugt einen unendlichen Wellenzug)

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k)\cdot e^{i(k\cdot x - \omega\cdot t)}\cdot dk \qquad \text{z.B. für } t = 0 \qquad \psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k)\cdot e^{i\cdot k\cdot x}\cdot dk$$

Spektrum und Wellenfunktion sind durch Fourier-Transformation verknüpft, d.h.

schmales Spektrum, kleine Impulsunschärfe ↔ breite Verteilung in *x*, große Ortsunschärfe
breites Spektrum, große Impulsunschärfe ↔ schmale Verteilung in *x*, kleine Ortsunschärfe

kastenförmige Verteilung der k-Werte ↔ [sin(*x*)/*x*]^2-Form des Wellenpakets
normalverteilte k-Werte ↔ Gauß-förmiges Wellenpaket

Anmerkung zur Phasen- und Gruppengeschwindigkeit

Ein Punkt einer Welle mit einer bestimmten Phase (z.B. Nulldurchgang oder Maximum) bewegt sich mit der Phasengeschwindigkeit

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi \cdot \upsilon}{2\pi / \lambda} \qquad \boxed{v_{ph} = \lambda \cdot \upsilon}$$

Die Phasengeschwindigkeit kann sogar höher sein als die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit (z.B. für eine Radiowelle in einem zylindrischen Rohr), wobei keine Information transportiert wird.

Wenn die Welle nicht beliebig ausgedehnt ist, sondern eine Einhüllende hat (z.B. rechteckig oder gaußförmig), bewegt sich die Einhüllende mit der Gruppengeschwindigkeit, die von der Phasengeschwindigkeit abweichen kann. Um eine Einhüllende zu erzeugen, benötigt man mindestens zwei Frequenzen und Wellenzahlen

$$\omega \quad \text{und} \quad \omega + \Delta\omega \quad \text{mit} \quad k \quad \text{und} \quad k + \Delta k$$

(eine einzige Frequenz würde ja einer unendlich ausgedehnten Sinuswelle entsprechen). Ein Maximum der Einhüllenden erhält man für Phasengleichheit der beiden Teilwellen

$$\omega \cdot t - k \cdot x = (\omega + \Delta\omega) \cdot t - (k + \Delta k) \cdot x \quad \rightarrow \quad 0 = \Delta\omega \cdot t - \Delta k \cdot x$$

$$v_g = \frac{x}{t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad \rightarrow \quad \boxed{v_g = \frac{d\omega}{dk}}$$

Dispersionsrelation $\omega(k)$ für Lichtwellen im Vakuum:

$$\omega(k) = c\frac{p}{\hbar} = c \cdot k$$

linear $\rightarrow$ keine Dispersion

Dispersionsrelation $\omega(k)$ für Materiewellen (nicht relativistisch):

$$\omega(k) = \frac{E}{\hbar} = \frac{p^2}{2m \cdot \hbar} = \frac{\hbar \cdot k^2}{2m}$$

nicht linear $\rightarrow$ Dispersion

z.B. normalverteilte *k*-Werte: $$C(k) \propto e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(k-k_0)}{\sigma_k^2}}$$

$$\psi(x,0) \propto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(k-k_0)}{\sigma_k^2}} \cdot e^{i\cdot k\cdot x} \cdot dk \propto e^{-\sigma_k^2\cdot x^2} \cdot e^{i\cdot k_0\cdot x}$$

$$\left|\psi(x,0)\right|^2 \propto e^{-2\sigma_k^2\cdot x^2} = e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma_x^2}} \quad \rightarrow \quad \sigma_x^2\cdot\sigma_k^2 = \frac{1}{4}$$

$$\sigma_x\cdot\sigma_k = \frac{1}{2}$$

Werner Heisenberg
(1901 - 1976)

σ ist die Standardabweichung, andere Konvention $\Delta x \equiv 2\sigma_x$ und $\Delta k = \sigma_k$

$$\Delta x\cdot\Delta k = 1$$

$$\Delta x\cdot\Delta p_x = \hbar$$

bei anderen *k,x*-Verteilungen ist das Produkt größer $\boxed{\Delta x\cdot\Delta p_x \geq \hbar}$ **Heisenbergsche Unschärferelation (1927)**

ursprünglich $\Delta x\cdot\Delta p_x \geq h$ **(wieder andere Definition der Breite)**

Bedeutung:

- **man kann keinen Zustand herstellen, bei dem Ort und Impuls eines Teilchens beliebig genau festgelegt sind**
- **man kann Ort und Impuls eines Teilchens nicht beliebig genau gleichzeitig messen**
- **Wellenpakete "zerfließen"**

z.B. Messung von Ort und Impuls bei *t = 0*:

$$\Delta x(t) = \sqrt{\Delta x^2(0) + \Delta v_g^2\cdot t^2} = \sqrt{\Delta x^2(0) + \frac{\Delta p^2(0)}{m^2}\cdot t^2}$$

Jede genauer der Ort gemessen wurde,
desto geringer die Breite des Pakets in *x* bei *t = 0*,
aber desto schneller läuft das Paket auseinander.

$$\Delta x(t) = \sqrt{\Delta x^2(0) + \frac{\hbar^2}{m^2\cdot\Delta x^2(0)}\cdot t^2} \approx \frac{\hbar}{m\cdot\Delta x(0)}\cdot t$$

Im Alltag mit massiven Teilchen nicht beobachtbar, z.B. 1 μm großes Körnchen unter einem Mikroskop:

$$\Delta x = 1\,\mu\text{m} = 10^{-6}\text{ m} \qquad m = \rho \cdot V \approx 1\,\text{kg/m}^3 \cdot \left(10^{-6}\text{ m}\right)^3 = 10^{-18}\text{ kg}$$

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{6{,}6 \cdot 10^{-34}\text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}}{6.28 \cdot 10^{-6}\text{ m}} \approx 10^{-28}\text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\Delta v \geq \frac{\Delta p}{m} = \frac{10^{-28}\text{ kg} \cdot \text{m/s}}{10^{-18}\text{ kg}} = 10^{-10}\text{ m/s}$$

Bei Licht aber selbstverständlich, weil Photonen sich mit Lichtgeschwindigkeit bewegen (statt *v* = *p* / *m*)

- makroskopisch beobachtbare Beugungserscheinungen, Auflösungsgrenze eines Mikroskops
- Zeit-Bandbreiten-Produkt für gaußförmige Strahlungspulse (Laser, Radiowellen)

$$\Delta t \cdot \Delta \upsilon \geq 0{,}44$$

(hier: Halbwertsbreiten)

Unschärferelationen zwischen anderen physikalischen Größen

z.B. Energie und Zeit
Frequenzverteilung am Ort *x* = *0*:

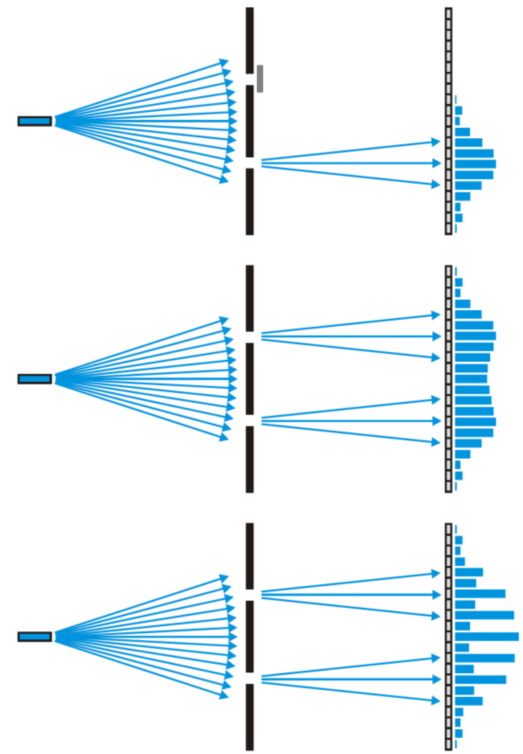
$$C(\omega) \propto e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(\omega-\omega_0)}{\sigma_\omega^2}}$$

$$\psi(0,t) \propto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\cdot\frac{(\omega-\omega_0)}{\sigma_\omega^2}} \cdot e^{-i\cdot\omega\cdot t} \cdot d\omega \propto e^{-\sigma_\omega^2 \cdot t^2} \cdot e^{-i\cdot\omega_0\cdot t}$$

$$\left|\psi(0,t)\right|^2 \propto e^{-2\sigma_\omega^2\cdot t^2} = e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma_t^2}} \qquad \rightarrow \qquad \sigma_\omega \cdot \sigma_t = \frac{1}{2}$$

$$E = \hbar \cdot \omega \qquad\qquad \boxed{\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar}$$

Doppelspaltexperimente mit Licht



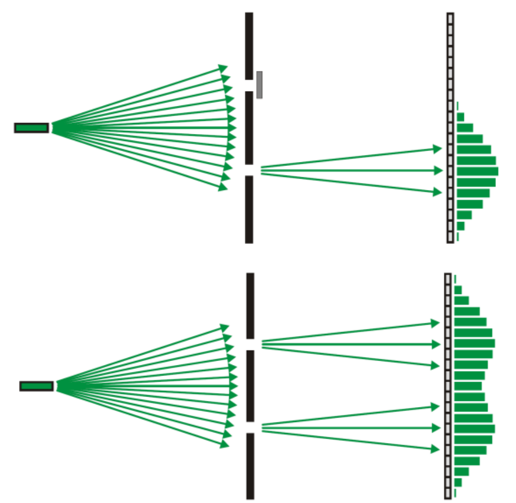
- ein Spalt verdeckt:
Beugungsmuster des Spalts

- beide Spalte, aber inkohärentes Licht:
doppeltes Maximum

- beide Spalte und kohärentes Licht:
Interferenzmuster,
Abstand der Streifen hängt von Spaltabstand ab,
Einhüllende ist (im Fernfeld) Beugungsmuster des Spalts
Intensität proportional zum Betragsquadrat des (komplexen) E-Felds

$$I \propto \left|\vec{E}\right|^2 = \left|\vec{E}_1 + \vec{E}_2\right|^2$$

Doppelspaltexperimente mit Kugeln (z.B. Fußbälle)

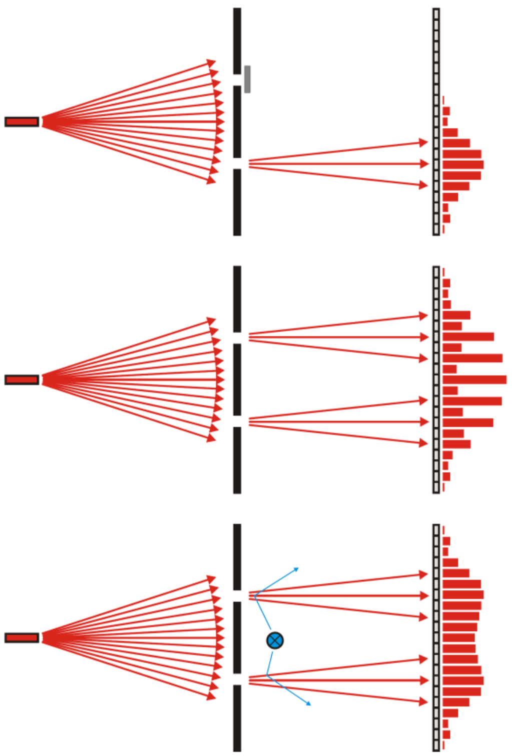


- ein Spalt verdeckt:
ein Maximum

- beide Spalte, aber inkohärentes Licht:
doppeltes Maximum
Intensität proportional zur Wahrscheinlichkeit der Auftreffpunkte

$$I \propto P = P_1 + P_2$$

Doppelspaltexperimente mit Elektronen



- ein Spalt verdeckt:
Beugungsmuster des Spalts

- beide Spalte und Wege nicht unterscheidbar:
Interferenzmuster,
Abstand der Streifen hängt von Spaltabstand ab,
Einhüllende ist (im Fernfeld) Beugungsmuster des Spalts
Intensität proportional zum Betragsquadrat der Gesamtwellenfunktion,
d.h. der Summe beider Wellenfunktionen

$$I \propto P = |\psi|^2 = |\psi_1 + \psi_2|^2$$

- Wege unterscheidbar (z.B. an Elektronen gestreutes Licht detektiert):
Interferenzmuster verschwindet
Intensität proportional zur Summe der Wahrscheinlichkeiten

$$I \propto P = P_1 + P_2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$$

Wie kann sich das Muster auf dem Schirm ändern?

Die Streuung am Licht stört die Bahnen der Elektronen; generell: Messprozesse beeinflussen stets die Messung.

Interferenz tritt auf, wenn zwei (oder mehrere) Wege zum selben Endzustand führen und nicht beobachtet werden. Das können geometrische Wege sein, aber auch z.B. energetische Zwischenzustände eines Atoms, Kerns usw. oder ununterscheidbare Teilchen.

Experimente

- Thomas Young (1802)
- Claus Jönnson (1961)
- später auch Neutronen, Atome, Moleküle (Fullerene 2000)

Zeitschrift für Physik 161, 454—474 (1961)

Aus dem Institut für Angewandte Physik der Universität Tübingen

Elektroneninterferenzen an mehreren künstlich hergestellten Feinspalten

Von
Claus Jönsson