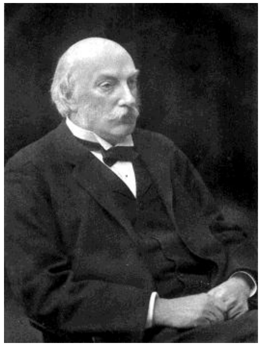
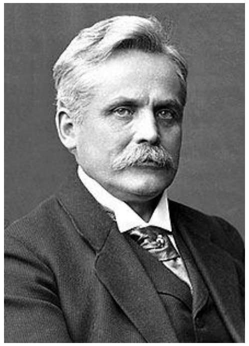
2 Grundlagen der Quantenmechanik

2.1 Spektrum des Schwarzen Körpers

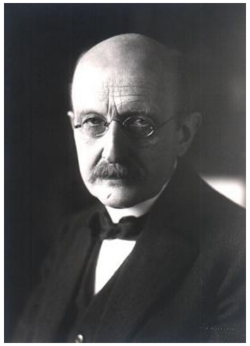
Sir James Jeans
1877-1946



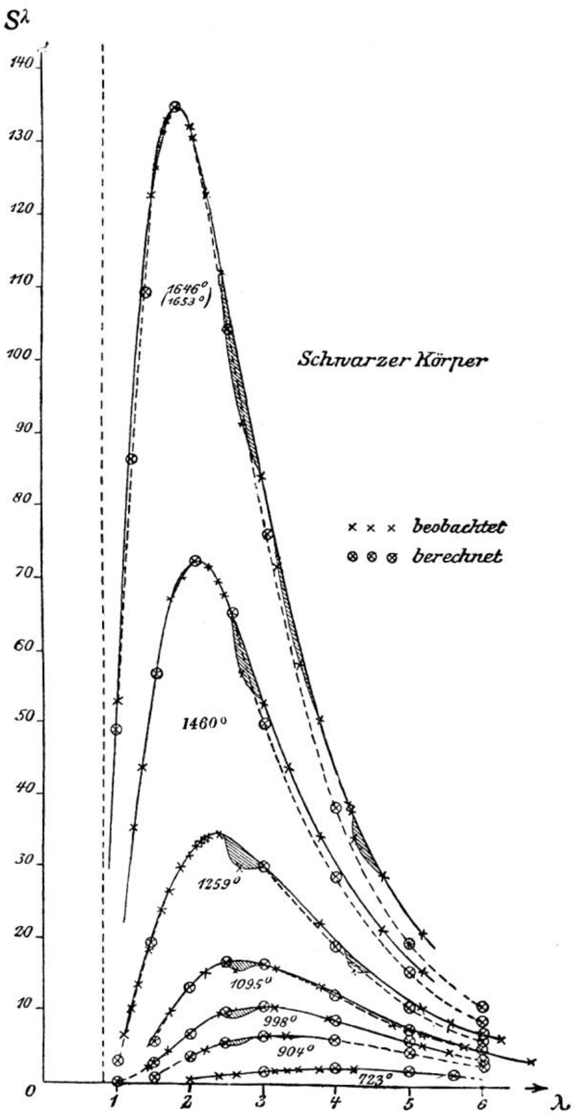
John Strutt
(Baron Rayleigh)
1842-1919



Wilhelm Wien
1864-1928



Max Planck
1858-1947



Wiensches Strahlungsgesetz (für kleine Wellenlängen)

$$P(\lambda) \propto \frac{1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{\text{const.}}{\lambda \cdot T}\right)} \cdot d\lambda$$

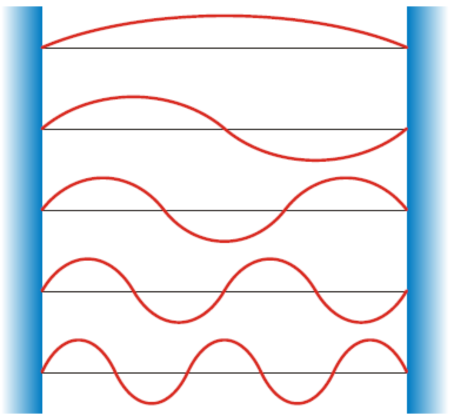
Rayleigh-Jeans-Gesetz (für große Wellenlängen)

$$P(\lambda) \propto \frac{1}{\lambda^4} \cdot d\lambda$$

Plancksche Interpolation

$$P(\lambda) \propto \frac{1}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{\exp\left(\frac{\text{const.}}{k \cdot T}\right) - 1} \cdot d\lambda$$

Spektrum des Schwarzen Körpers

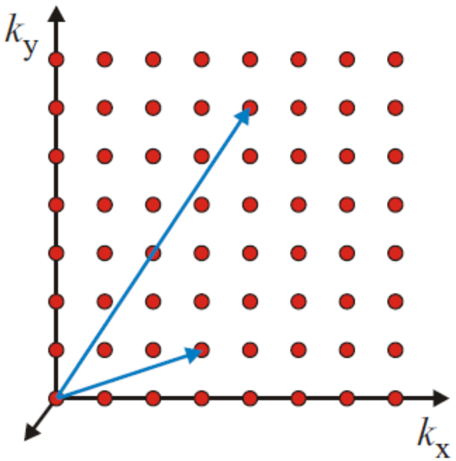


Schwingungsmoden im Hohlraumresonator

1-dimensionale Betrachtung (*n* ganzzahlig)

$$n \cdot \frac{\lambda}{2} = a \quad \rightarrow \quad k = \frac{\pi}{a} n \quad \text{mit} \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

Verallgemeinerung auf 3 Dimensionen (*n*, *m*, *q* ganzzahlig)



$$k = \frac{\pi}{a}\sqrt{n^2 + m^2 + q^2}$$

$$V_E = \frac{\pi^3}{a^3}$$ Volumen der Einheitszelle im *k*-Raum

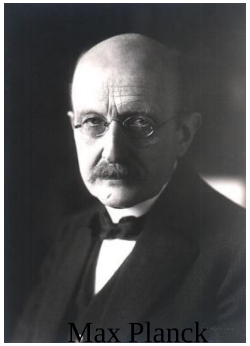
$$V_k = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} \cdot k^3$$ Volumen einer 1/8 Kugel mit Radius *k* im *k*-Raum

$$N_k = 2\frac{V_k}{V_E} = \frac{1}{3}\frac{a^3}{\pi^2}k^3$$ Zahl der Moden bis zur Wellenzahl *k* (Faktor 2 weil 2 Polarisationsrichtungen)

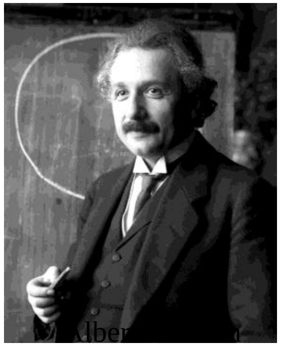
$$\frac{N_k}{V} = \frac{N_k}{a^3} = \frac{1}{3\pi^2}k^3 = \frac{8\pi}{3c^3}\upsilon^3 \quad \text{mit} \quad k = \frac{2\pi\upsilon}{c}$$ Zahl der Moden bis zur Frequenz υ pro Volumen des Resonators

$$\frac{d}{d\upsilon}\left(\frac{N_k}{V}\right) = \frac{8\pi}{c^3}\upsilon^2 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{8\pi}{c^3}\upsilon^2 d\upsilon}$$ Zahl der Moden im Frequenzintervall υ *und* $\upsilon + d\upsilon$ pro Volumen des Resonators ("spektrale Modendichte")

Herleitung nach Planck und Einstein



Max Planck
1858-1947



1879-1955

Spektrale Energiedichte im Frequenzintervall υ bis $\upsilon+d\upsilon$
Spektrale Modendichte · mittlere Energie pro Mode

$$\rho(\upsilon,T)\cdot d\upsilon = \frac{8\pi}{c^3}\upsilon^2\cdot\overline{W}\cdot d\upsilon$$

$$\overline{W} = k\cdot T \qquad \rho(\upsilon,T)\cdot d\upsilon = \frac{8\pi}{c^3}\upsilon^2\cdot k\cdot T\cdot d\upsilon$$

Rayleigh-Jeans-Gesetz (führt zur "Ultraviolett-Katastrophe").

Ausweg: Energie einer Mode ist ganzahliges Vielfaches von **Energiequanten**, die proportional zur jeweiligen Frequenz sind (Proportionalitätsfaktor *h* ist das sog. Plancksche Wirkungsquantum):

$$W_\upsilon = n\cdot h\cdot\upsilon$$

Aber: Die Wahrscheinlichkeit soll mit der Energie (d.h. mit der Zahl der Quanten *n*) exponentiell abnehmen. Die mittlere Energie pro Mode ist dann

$$\overline{W} = \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot h\cdot\upsilon\cdot p = \sum_{n=0}^{\infty} n\cdot h\cdot\upsilon\cdot\frac{\exp(-n\cdot h\cdot\upsilon/k\cdot T)}{\sum\limits_{n=0}^{\infty}\exp(-n\cdot h\cdot\upsilon/k\cdot T)} = h\cdot\upsilon\cdot\frac{1}{\exp(h\cdot\upsilon/k\cdot T)-1}$$

Der Zähler ist ein Boltzmann-Faktor wie in der kinetischen Gastheorie, der Nenner dient der Normierung (Summe aller Wahrscheinlichkeiten ist 1).

Herleitung des letzten Schritts s. nächste Seite.

Setze $\alpha \equiv h \cdot \upsilon$ und $\beta \equiv \dfrac{1}{k \cdot T}$

$$\frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \cdot \alpha \cdot \exp(-n \cdot \alpha \cdot \beta)}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n \cdot \alpha \cdot \beta)} = \frac{-\frac{\partial}{\partial \beta}\left\{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n \cdot \alpha \cdot \beta)\right\}}{\sum_{n=0}^{\infty} \exp(-n \cdot \alpha \cdot \beta)} = -\frac{\partial}{\partial \beta}\left\{\frac{1}{1-\exp(-\alpha \cdot \beta)}\right\} \cdot 1-\exp(-\alpha \cdot \beta)$$

$$= \frac{\alpha \cdot \exp(-\alpha \cdot \beta)}{1-\exp(-\alpha \cdot \beta)} = \frac{\alpha}{\exp(\alpha \cdot \beta)-1} \quad \text{mit} \quad \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad \text{für} \quad q = \exp(-\alpha \cdot \beta) < 1$$

geometrische Reihe

Damit $\boxed{\rho(\upsilon,T) \cdot d\upsilon = \dfrac{8\pi}{c^3} \cdot \dfrac{h\upsilon^3}{\exp(h\upsilon / kT)-1} \cdot d\upsilon}$ **Plancksche Strahlungsformel**

Einstein $\dfrac{n_E}{n_0} = \exp\left(-\dfrac{E}{kT}\right)$ mit $E = h \cdot \upsilon$ Verhältnis von angeregten zu nicht angeregten Atomen

$$\gamma \cdot \rho(\upsilon,T) \cdot n_0 \cdot d\upsilon \quad = \quad \beta \cdot n_E \quad + \quad \gamma \cdot \rho(\upsilon,T) \cdot n_E \cdot d\upsilon$$

Absorptionen pro Zeit und Volumen = spontane Emissionen + stimulierte* Emissionen

$$\rho(\upsilon,T) \cdot d\upsilon = \frac{\beta}{\gamma} \frac{n_E}{n_0 - n_E} = \frac{\beta}{\gamma} \frac{n_E / n_0}{1-n_E / n_0} = \frac{\beta}{\gamma} \frac{\exp(-h\upsilon / kT)}{1-\exp(-h\upsilon / kT)} = \frac{\beta}{\gamma} \frac{1}{\exp(h\upsilon / kT)-1}$$

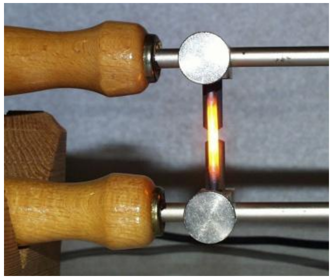
$\dfrac{\beta}{\gamma} \equiv \dfrac{8\pi}{c^3} \upsilon^2 \cdot d\upsilon \cdot h\upsilon$ führt wieder zur Planckschen Strahlungsformel

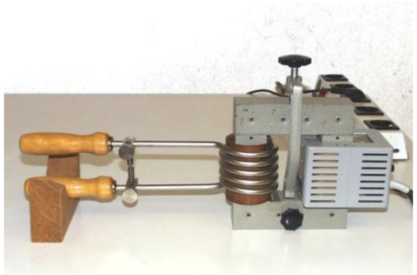
* stimulierte Emission wurde hier ad hoc eingeführt, erweist sich später als Grundlage für das Verständnis des Laser

Experimente zur Strahlung des schwarzen Körpers

a) Wiensches Verschiebungsgesetz (qualitativ)

Ein hoher Strom fließt durch einen Nagel, der zunächst rot, dann gelblich und schließlich weiß glüht (wenn er nicht vorher durchschmilzt). Das Spektrum verschiebt sich mit zunehmendem Strom (d.h. mit zunehmender Temperatur) zu kleineren Wellenlängen.



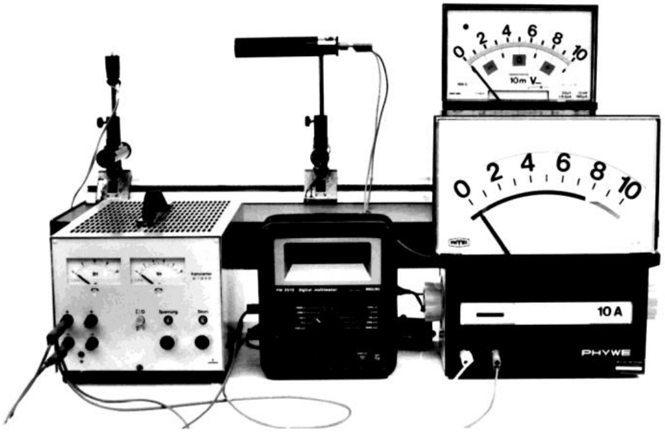


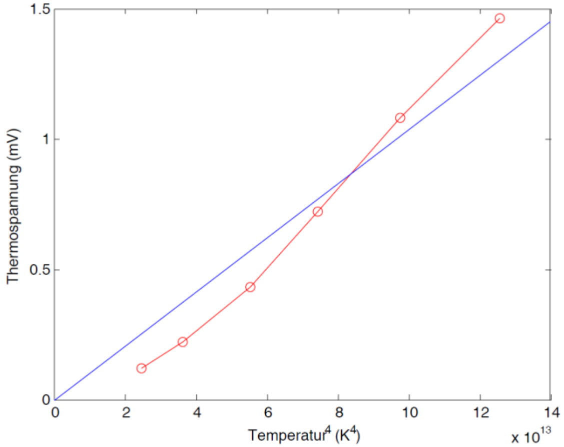
b) Stefan-Boltzmann-Gesetz

Abstrahlung einer Glühlampe wird mit einer Thermosäule gemessen. Die auf verschiedene Effekte korrigierte Temperatur des Glühfadens ergibt sich aus dem eingestellten Strom I_L und der gemessenen Spannung U_L nach Anleitung gemäß

$$T_{korr} = 2305\,\mathrm{K}\cdot\Omega^{-1}\cdot\left(\frac{U_L}{I_L} - 0{,}17\,\Omega\right) + 273\,\mathrm{K}$$

Der Messwert der Thermosäule, die sog. Thermospannung, sollte gegen die Temperatur zur vierten Potenz aufgetragen eine Ursprungsgerade ergeben.





2.2 Der photoelektrische Effekt

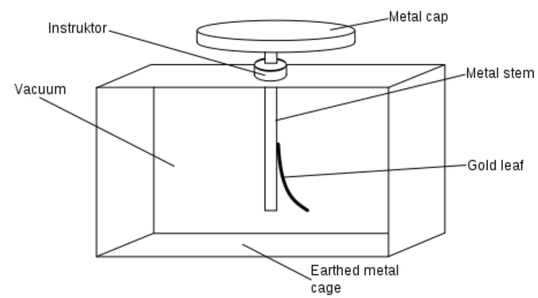
Phillip Lenard
(1862 – 1947)

Durch die Bestrahlung mit Licht (insbesondere UV) werden aus einer Metallplatte Elektronen herausgelöst (quantitative Untersuchungen von P. Lenard um 1900, davor 1839 Hinweise von A. Becquerel, 1887 H. Hertz und W. Hallwachs).

Eine negativ geladene Platte wird entladen, bei konstanter Spannung zwischen der bestrahlten Photokathode und einer Auffanganode fließt ein Strom.

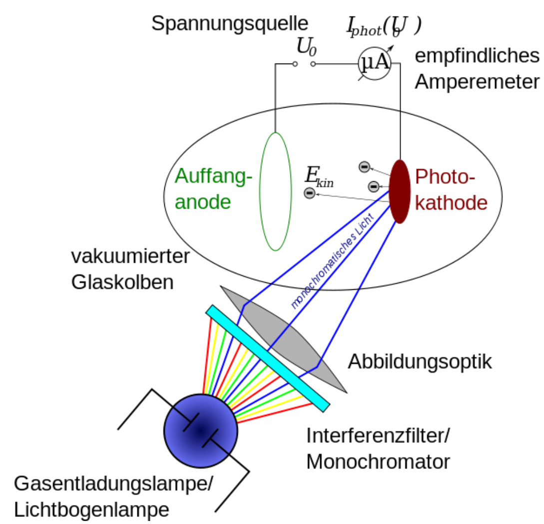
$$\boxed{E_{\max} = -e \cdot U_0 = h \cdot \upsilon - W_a}$$

Die max. kinetische Energie der emittierten Elektronen wird durch die Gegenspannung U_0 bestimmt, bei der ein Stromfluss einsetzt. Sie ist gleich der Photonenenergie $h \cdot \upsilon$ minus der Austrittsarbeit W_a und unabhängig von der Lichtintensität.



Teilchencharakter von Licht

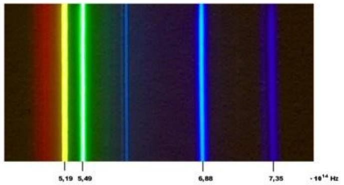
Eine Licht<u>welle</u> würde ihre Energie gleichmäßig auf alle Atome verteilen. Die Elektronenemission würde mit großer Verzögerung einsetzen (Stunden!) und die kinetische Energie würde von der Lichtintensität abhängen. Trotzdem ist die Wellenvorstellung sehr erfolgreich (Beugung).

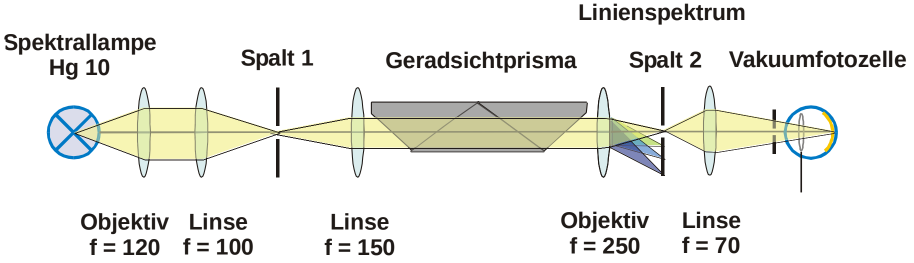


Welle-Teilchen-Dualismus

Licht hat **sowohl** Wellen- **als auch** Teilchencharakter, abhängig von der experimentellen Situation.

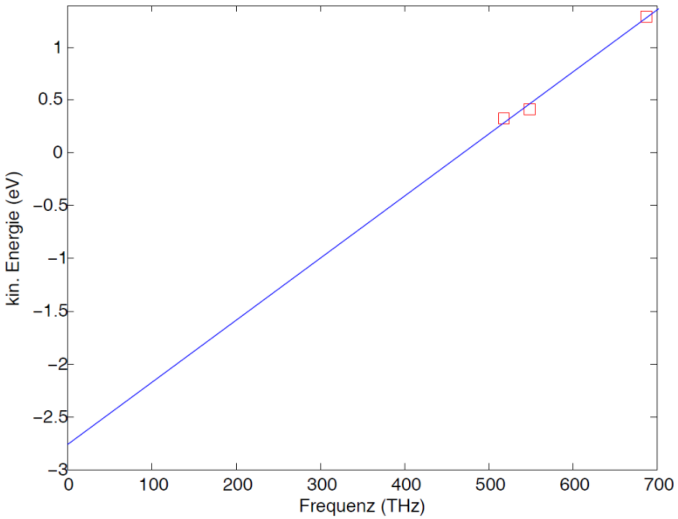
Experiment zum Photoeffekt





Eine Quecksilberdampflampe emittiert u.a. gelbes, grünes und blaues Licht, das auf eine Fotozelle gelenkt wird: Die Kalium-Beschichtung (Austrittsarbeit 2,25 eV) des Glaskolbens dient als Photokathode, ein ringförmiger Draht als Anode. Gemessen wird eine Photostrom, der bei einer bestimmten Gegenspannung verschwindet. Diese Spannung entspricht der kinetischen Energie der Photoelektronen in eV. Messung:

Farbe	Frequenz (Hz)	Photonenergie (eV)	Spannung (U)
gelb	$5{,}19 \cdot 10^{14}$	2,15	0,327
grün	$5{,}49 \cdot 10^{14}$	2,27	0,421
blau	$6{,}88 \cdot 10^{14}$	2,85	1,292



Die Steigung der Ausgleichsgeraden ergibt
$h = 5{,}9 \cdot 10^{-15}$ eV·s (Literaturwert $4{,}14 \cdot 10^{-15}$ eV·s),
der Punkt bei Frequenz 0 entspricht der Austrittsarbeit
$W_a = 2{,}76$ eV (Literaturwert 2,25 eV).

Das Plancksche Wirkungsquantum

$$h = \left(6{,}626.069.57 \pm 0{,}000.000.29\right) \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}$$ (SI-Einheiten)

$$h = \frac{6{,}626 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s}}{1{,}602 \cdot 10^{-19}\mathrm{C}} e = 4{,}136 \cdot 10^{-15}\ \mathrm{eV \cdot s}$$ ("natürliche" Einheiten)

$$E = h \cdot \upsilon = \frac{h}{2\pi}\omega = \hbar \cdot \omega$$ **Energie eines Photons (eines Lichtquants)**

$$\hbar = \frac{h}{2\pi} = 1{,}055 \cdot 10^{-34}\ \mathrm{J \cdot s} = 6{,}582 \cdot 10^{-16}\ \mathrm{eV \cdot s}$$ (sprich: "h quer")

Bestimmung

Historisch
- Spektrum eines schwarzen Körpers
- kinetische Energie von Photoelektronen als Funktion der Frequenz

Zurzeit genaueste Messung
- Watt-Waage:
  gespannter Draht, Strom *I* im Magnetfeld *B* kompensiert Gewicht,
  Draht wird durch das Magnetfeld bewegt, Bestimmung von *B* durch Induktionsspannung *U*,
  Messung von *U* mit sog. "Josephson-Effekt" (Tunnelstrom zwischen zwei Supraleitern),
  Messung von *I* mit sog. "Quanten-Hall-Effekt" (Sprünge der Hall-Spannung bei tiefen Temperaturen),
  in beide Effekte geht der Wert von *h* ein, der auf diese Weise bestimmt werden kann.