

3.4 Kernmodelle: Das Tröpfchenmodell

Vergleich des Kerns mit einem Flüssigkeitstropfen (konstante Dichte) zur Erklärung der Bindungsenergie $E_B(A)$.

Fünf Anteile:

1) **Volumenanteil:** gleiche Bindungsenergie für jedes Nukleon, da von den unmittelbaren Nachbarn abhängig

$$E_V = a_V \cdot A$$

2) **Oberflächenanteil:** geringere Bindungsenergie für Nukleonen an der Oberfläche (weniger Nachbarn)

$$E_S = -a_S \cdot A^{2/3} \quad \text{Oberfläche} \propto R^2 \propto A^{2/3}$$

3) **Coulombanteil:** Coulomb-Abstoßung, potenzielle Energie einer homogen geladenen Kugel

$$E_C = -a_C \cdot Z^2 \cdot A^{-1/3} \quad \text{Energie} \propto 1/R \propto 1/A^{1/3}$$

4) **Asymmetrieanteil:** wegen des Pauli-Prinzips ist die Gesamtenergie für $Z = N$ minimal

$$E_A = -a_A \cdot (Z - N)^2 / A$$

5) **Paarungsanteil:** wegen des Pauli-Prinzips werden gerade (g) Protonen- und Neutronenzahlen bevorzugt

$$E_P = a_P \cdot \delta \cdot A^{-1/2} \quad \text{gg} : \delta = 1 \quad \text{gu/ug} : \delta = 0 \quad \text{uu} : \delta = -1$$

(g = gerade, u = ungerade Protonen- und Neutronenzahl)

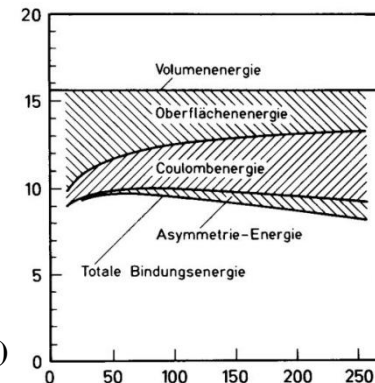
Insgesamt

$$E_B = a_V \cdot A - a_S \cdot A^{2/3} - a_C \cdot Z^2 \cdot A^{-1/3} - a_A \cdot (Z - N)^2 / A + a_P \cdot \delta \cdot A^{-1/2}$$

- Empirische Parameter:
- $a_V = 15,8 \text{ MeV}$
 - $a_S = 18,3 \text{ MeV}$
 - $a_C = 0,71 \text{ MeV}$
 - $a_A = 92,8 \text{ MeV}$
 - $a_P = 11,4 \text{ MeV}$

(Anmerkung:

Ein erweitertes Tröpfchenmodell erklärt auch Rotations- und Vibrationszustände von Atomkernen)



3.5 Kernmodelle: Das Schalenmodell

Einteilchenmodell zur Beschreibung eines Vielteilchensystem:

Jedes einzelne Nukleon bewegt sich im Kernpotenzial, das von der Gesamtheit der Nukleonen erzeugt wird.

Zunächst:

Das Fermigasmodell

Das Nukleon bewegt sich quasi frei in einem Potenzialtopf mit steilen Wänden, im einfachsten Fall durch ein dreidimensionales Kastenpotenzial der Breite a mit unendlich hohen Wänden beschrieben.

$$E_{pot} = \begin{cases} 0 & \text{für } r < a \\ \infty & \text{für } r \geq a \end{cases} \quad \rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi = E \cdot \psi \quad \psi(x, y, z) = \psi_1(x) \cdot \psi_2(y) \cdot \psi_3(z)$$

$$E = E_x + E_y + E_z$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_1 = E_x \cdot \psi_1$$

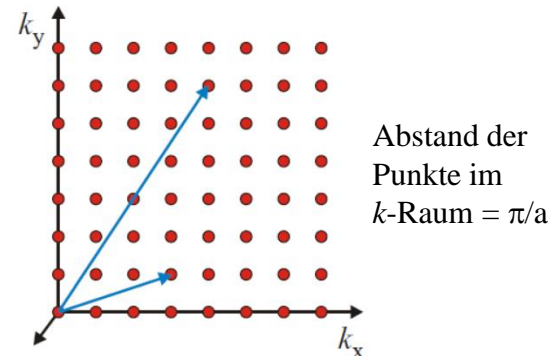
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_1 = k_x^2 \cdot \psi_1 \quad \rightarrow \quad \psi_1 = A_1 \cdot \sin(k_x \cdot x) \quad \text{mit} \quad k_x = n_x \cdot \pi / a \quad \text{und analog für } y \text{ und } z$$

$$E_x = \frac{\hbar^2 \cdot \pi^2}{2m \cdot a^2} n_x^2$$

$$E = \frac{\hbar^2 \cdot \pi^2}{2m \cdot a^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

Die Zahl der möglichen Energiewerte von 0 bis E_{max} ist durch die Zahl der Gitterpunkte im erreichbaren k -Raum gegeben (ein Oktant einer Kugel mit "Radius" k_{max}):

$$n = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R^3 = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{p_{max} / \hbar}{\pi / a} \right)^3 = \frac{a^3}{6\pi^2 \cdot \hbar^3} (2m \cdot E_{max})^{3/2}$$



Da Nukleonen Spin-1/2-Teilchen sind, kann jedes Niveau zweimal besetzt werden. Die Energie, bis zu der der Potenzialtopf mit Teilchen gefüllt wird, heisst Fermi-Energie:

$$n_F = \frac{a^3}{3\pi^2 \cdot \hbar^3} (2m \cdot E_F)^{3/2} = \frac{V}{3\pi^2 \cdot \hbar^3} (2m \cdot E_F)^{3/2}$$

Zustandsdichte $\sim E^{1/2}$

$$n_F^{2/3} = \frac{2m}{\hbar^2} E_F \cdot \left(\frac{V}{3\pi^2} \right)^{2/3} \rightarrow E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2}{V} n_F \right)^{2/3}$$

$$\frac{dn}{dE} = \frac{(2m)^{3/2} \cdot V}{3\pi^2 \cdot \hbar^3} \cdot \frac{3}{2} \cdot E^{1/2}$$

Die Fermi-Energie kann nun mit der bekannten Dichte von Kernmaterie explizit berechnet werden:

$$\frac{n_F}{V} = \frac{A}{(4/3)\pi \cdot r_0^3 \cdot A} \approx 10^{44} \frac{1}{\text{m}^3} \rightarrow E_F = \frac{(6,6 \cdot 10^{-22} \text{ MeVs})^2 \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 938 \text{ MeV}} \left(30 \cdot 10^{44} \frac{1}{\text{m}^3} \right)^{2/3}$$

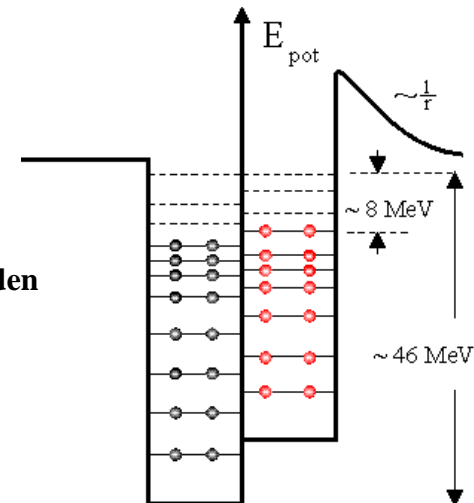
$$E_F \approx 42 \text{ MeV}$$

Mit Bindungsenergien pro Nukleon um 8 MeV beträgt die Tiefe des Potenzialtopfes typischerweise 50 MeV und hängt nur wenig von der Größe des Kerns ab.

Ein etwas besseres Modell berücksichtigt die Coulomb-Abstoßung der Protonen, d.h. Protonen und Neutronen haben jeweils ihren eigenen Potenzialtopf, der für die Protonen etwas höher liegt und eine Coulomb-Barriere besitzt. Beide Töpfe sind etwa gleich hoch mit Nukleonen gefüllt (sonst würde sich ein Proton in ein Neutron umwandeln oder umgekehrt).

Ferner kann man das Kastenpotenzial durch einen Topf mit weniger steilen Wänden ersetzen, z.B. durch das eines harmonischen Oszillators oder durch das sog. Woods-Saxon-Potenzial

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{(r-R)/b}}$$



Bei der Bindungsenergie pro Nukleon zeigte sich bereits, dass es **magische Zahlen 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126** gibt, die mit dem Kastenpotenzial nicht erklärt werden. Die Bindungsenergie ist

$$E_B(Z, N) = (Z \cdot m_p + N \cdot m_n - m(Z, N)) \cdot c^2$$

Die Separationsenergie, die benötigt wird, ergibt sich einerseits aus

$$E_S + E_F = E_0$$

wobei E_0 die Tiefe des Potenzials und die Fermi-Energie E_F die Energie ist, bis zu der der Potenzialtopf gefüllt ist, also die maximale kinetische Energie eines Nukleons. Ferner erhält man E_S aus

$$E_S(p) = E_B(Z, N) - E_B(Z - 1, N)$$

$$E_S(n) = E_B(Z, N) - E_B(Z, N - 1)$$



Hans Jensen
(1907 - 1973)



Maria Goeppert-Mayer
(1906 - 1972)

Auch an den Separationsenergien erkennt man die magischen Zahlen. Als Funktion von Z und N ähnelt ihr Verlauf den Ionisierungsenergien der Atomhülle, die bei vollständig abgeschlossenen Schalen besonders hoch ist. Wenn das Potenzial bekannt wäre, könnte man die Schrödingergleichung lösen, wobei man bei einem kugelsymmetrischen Potenzial den Radial- und Winkelanteil separat behandeln kann. Für den Winkelanteil ergeben sich wieder Kugelflächenfunktionen, die von den Quantenzahlen des Drehimpulses l und seiner Orientierung m abhängen. Für die radiale Lösung $R(r)$ gilt

$$u(r) = r \cdot R_n(r) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E - V(r) - \frac{l \cdot (l+1) \cdot \hbar^2}{2\mu \cdot r^2} \right) \cdot u = 0$$

Bei verschiedenen Potenzialen (z.B. endlich hoher Kasten, harmonischer Oszillator etc.) zeigt sich, dass die magischen Zahlen für die vollständige Besetzung einer "Schale" (gegeben durch die Hauptquantenzahl n) nur für niedrige n reproduziert werden. **Das liegt daran, dass - im Gegensatz zur Atomhülle - die Spin-Bahn-Kopplung zu einer starken Aufspaltung der Energieniveaus führt**, die mit den n -abhängigen Niveauabständen vergleichbar ist.

$$V(r) \rightarrow V(r) + V_{ls}(r) \cdot \vec{l} \cdot \vec{s}$$

Wie beim Drehimpuls der Atomhülle:

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \quad \vec{j}^2 = \vec{l}^2 + \vec{s}^2 + 2 \cdot \vec{l} \cdot \vec{s}$$

$$\vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2} \{ \vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2 \} = \frac{\hbar^2}{2} \{ j \cdot (j+1) - l \cdot (l+1) - s \cdot (s+1) \}$$

Es gibt nur zwei Möglichkeiten:

$$s = +\frac{1}{2}; \quad j = l + \frac{1}{2}:$$

$$\vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{\hbar^2}{2} \left\{ \left(l + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(l + \frac{3}{2} \right) - l \cdot (l+1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right\} = \frac{\hbar^2}{2} \left\{ l^2 + 2l + \frac{3}{4} - l^2 - l - \frac{3}{4} \right\} = \frac{\hbar^2}{2} \cdot l$$

$$s = -\frac{1}{2}; \quad j = l - \frac{1}{2}:$$

$$\vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{\hbar^2}{2} \left\{ \left(l - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(l + \frac{1}{2} \right) - l \cdot (l+1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right\} = \frac{\hbar^2}{2} \left\{ l^2 - \frac{1}{4} - l^2 - l - \frac{3}{4} \right\} = -\frac{\hbar^2}{2} \cdot (l+1)$$

Die Energiedifferenz ist $\Delta E = V_{ls} \frac{\hbar^2}{2} \cdot (2l+1)$ wobei (wie sich herausstellt) $V_{ls} < 0$ ist.

Mit numerischen Rechnungen und geeigneten Potenzialen werden die magischen Zahlen reproduziert. Außerdem zeigt sich experimentell, dass Kerne mit abgeschlossenen Schalen kein elektrisches Quadrupolmoment besitzen, also - wie erwartet - kugelsymmetrisch sind. Der Kernspin eines Kerns mit einem Nukleon außerhalb einer abgeschlossenen Schale wird durch dieses Nukleon bestimmt. Bei mehreren Nukleonen liegt *jj*-Kopplung (wie bei Elektronen schwerer Elemente) vor.

$$\vec{I} = \sum_i \vec{j}_i \quad \text{mit} \quad \vec{j}_i = \vec{l}_i + \vec{s}_i$$

3.6 Kernreaktionen

Bei Kernreaktionen (reaktive Streuung) werden Atomkerne verändert. Übliche Schreibweise: $X(a,b)Y$

Man unterscheidet

- "**direkte**" **Reaktionen**, bei denen z.B. ein Nukleon aus dem Kern herausgeschlagen wird
 - "**Compound-Kern**"-**Reaktionen**, bei denen der Kern Energie aufnimmt und z.B. kollektiv angeregt wird (Vibration, Rotation) und dieser "Zwischenkern" anschließend ein oder mehrere Nukleonen "abdampft"
- Sie unterscheiden sich in der Dauer des Prozesses (direkt 10^{-22} s, Compound-Kern 10^{-16} s) und in der Winkelverteilung der Reaktionsprodukte (gerichtet oder isotrop).

Es gelten mehrere Erhaltungssätze:

- **Energiesatz**
- **Impulssatz**
- **Erhaltung der Ladung**
- **Drehimpulserhaltung**
- **Erhaltung der Nukleonenzahl A** (unterhalb der Energieschwelle für die Erzeugung neuer Elementarteilchen)
- **Erhaltung der Parität** (symmetrisch oder antisymmetrisch bei Spiegelung aller Koordinaten) für starke WW

Zum Energiesatz: Die Energiebilanz der Reaktion ergibt sich aus den Massen der beteiligten Kerne

$$m(X) + m(a) = m(Y) + m(b) + Q / c^2$$

Der Q -Wert besagt, ob eine Reaktion unter Energiegewinn (exotherm $Q > 0$) oder Energieverlust (endotherm $Q < 0$) verläuft. Im Fall einer endothermen Reaktion muss die kinetische Energie des Projektils nicht nur $-Q$ aufbringen, sondern auch die kinetische Energie der Schwerpunktsbewegung von Projektil und (zunächst ruhendem) Targetkern.

Impulssatz:

$$m_a \cdot v_a = (m_a + m_X) \cdot v_S \quad v_S = \frac{m_a}{m_a + m_X} v_a \quad E_{kin,S} = \frac{1}{2} (m_a + m_X) \frac{m_a^2 \cdot v_a^2}{(m_a + m_X)^2} = \frac{1}{2} \frac{m_a^2 \cdot v_a^2}{m_a + m_X}$$

Daraus ergibt sich die Mindestenergie des Projektils: (Energieschwelle)

$$E_S = -Q + \frac{p_a^2}{2(m_a + m_X)} = -Q + \frac{E_S}{1 + \frac{m_X}{m_a}} \rightarrow E_S = -Q \cdot \left(1 + \frac{m_a}{m_X} \right)$$