

d) Potenzialbarriere – der Tunneleffekt

- I) $V(x) = 0$ für $x < 0$
- II) $V(x) = V_0 > 0$ für $0 \leq x \leq a$
- III) $V(x) = 0$ für $x > a$

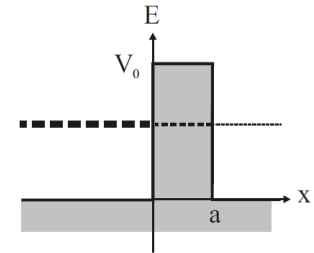
Wellenfunktionen in den drei Bereichen

stetig und differenzierbar an den Grenzen bei $x = 0$ und $x = a$:

- I) $\psi_I(x) = A \cdot e^{i \cdot k \cdot x} + B \cdot e^{-i \cdot k \cdot x}$
- II) $\psi_{II}(x) = C \cdot e^{\alpha \cdot x} + D \cdot e^{-\alpha \cdot x}$
- III) $\psi_{III}(x) = E \cdot e^{i \cdot k \cdot x}$

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \quad \frac{\partial \psi_I(0)}{\partial x} = \frac{\partial \psi_{II}(0)}{\partial x}$$

$$\psi_{II}(a) = \psi_{III}(a) \quad \frac{\partial \psi_{II}(a)}{\partial x} = \frac{\partial \psi_{III}(a)}{\partial x}$$



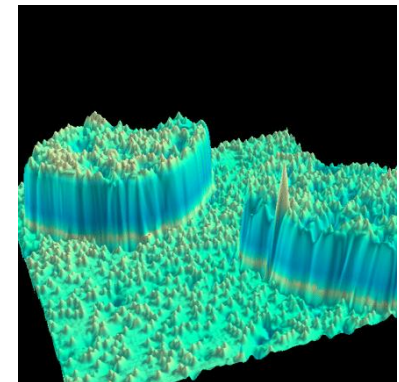
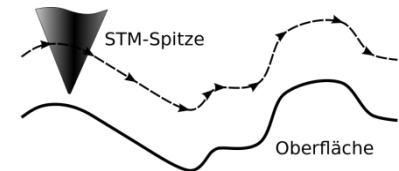
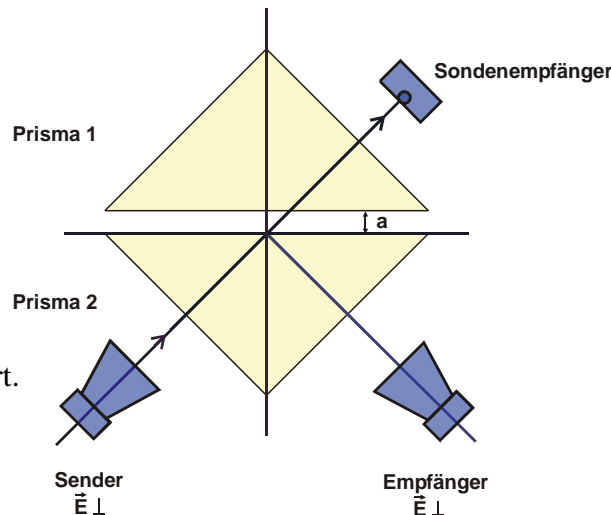
Resultate wie oben: Welle kann exponentiell gedämpft in die Barriere eindringen (Bereich II) und setzt sich jenseits der Barriere (Bereich III) als ebene Welle fort. Transmissionskoeffizient sinkt exponentiell mit α :

$$T \propto e^{-2 \cdot \alpha \cdot a} \quad \alpha \equiv \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m \cdot (V_0 - E)}$$

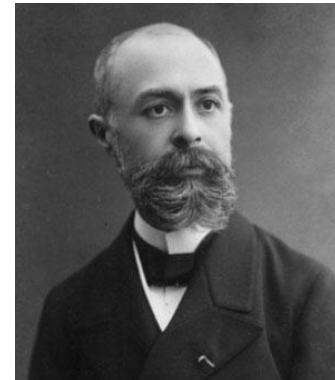
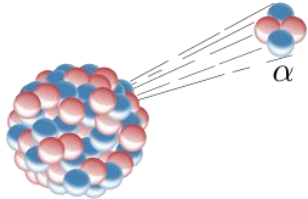
Beispiele zum Tunneleffekt

- Rastertunnelmikroskop
- Laserpulse in einem Gas
- Ammoniak-Molekül (NH₃)
- Alpha-Zerfall von Atomkernen
- Tunneln mit Mikrowellen:

Mikrowellen ($\lambda = 2,8$ cm) werden in einem Prisma aus Paraffin totalreflektiert. Mit einem zweiten Prisma im Abstand $a < \lambda$ wird ein Teil transmittiert.



Der Alpha-Zerfall von Atomkernen



Antoine-Henri Becquerel
(1852 – 1908)



George Gamow
(1904 – 1968)

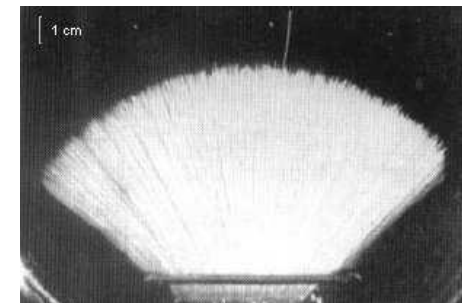
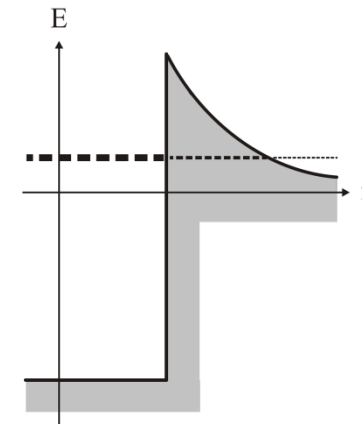
- 1896 Becquerel entdeckt, dass Uransalze Fotoplatten schwärzen
- 1908 Rutherford weist Helium spektroskopisch nach
- 1928 Gamow erklärt den α-Zerfall durch Tunneleffekt

Helium-Kerne (α-Teilchen) werden mit konstanter Energie von einigen MeV emittiert (was aufgrund der konstanten Reichweite am Luft evident ist). Je höher die Energie, desto kleiner die Halbwertszeit des radioaktiven Isotops. Zwei Protonen und zwei Neutronen sind besonders fest gebunden und bilden quasi ein "Teilchen" innerhalb des Atomkerns.

Das Innere des Atomkerns kann (grob) als Kastenpotenzial beschrieben werden, d.h. die Kraft auf Nukleonen und α-Teilchen ist konstant und nimmt am Rand schnell ab (die starke Wechselwirkung ist kurzreichweitig). Die Potenzialbarriere entsteht durch das abstoßende Coulomb-Potenzial, ist also nicht konstant, sondern eine Funktion des Radius:

$$V(r) = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{2Z \cdot e^2}{r_2}$$

- Ladung des α-Teilchens $2e$
- Ladung des Tochterkerns Ze
- Radius des Kerns r_1
- Radius des äußeren "Umkehrpunkts" r_2



WKB-Näherung (1926 Wentzel, Kramers, Brillouin)

Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x) \cdot \psi = E \cdot \psi \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} (E - V) \cdot \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + k^2 \cdot \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{p^2}{\hbar^2} \cdot \psi = 0$$

$$\psi(x) = A \cdot e^{\pm i \cdot k \cdot x} \quad k = \frac{p}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m \cdot (E - V)} \quad \text{Wellenzahl, reeller Impuls}$$

$$\psi(x) = A \cdot e^{\pm \alpha \cdot x} \quad \alpha = \frac{|p|}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m \cdot (V - E)} \quad \text{exponentieller Ausdruck, imaginärer Impuls}$$

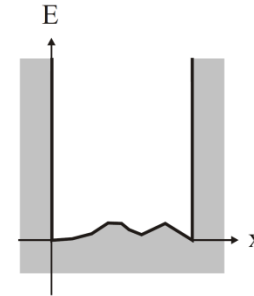
WKB-Näherung: wenn sich $V(x)$ langsam ändert (z.B. über eine de-Broglie-Wellenlänge nahezu konstant ist), dann bleibt die Wellenfunktion sinusförmig oder exponentiell und A , k und α sind langsam veränderliche Funktionen von x . Der Exponent kann auch durch die Phase $\phi(x)$ ausgedrückt werden.

$$\psi(x) = A(x) \cdot e^{i\phi(x)} \quad \text{statt} \quad \psi(x) = A \cdot e^{i \cdot k \cdot x}$$

Nebenrechnung: erste und zweite Ableitung nach x

$$\psi' = A' \cdot e^{i\phi} + A \cdot i \cdot \phi' \cdot e^{i\phi}$$

$$\psi'' = A'' \cdot e^{i\phi} + A' \cdot i \cdot \phi' \cdot e^{i\phi} + A' \cdot i \cdot \phi' \cdot e^{i\phi} + A \cdot i \cdot \phi'' \cdot e^{i\phi} + A \cdot i \cdot \phi' \cdot i \cdot \phi' \cdot e^{i\phi}$$



Zweite Ableitung in die Schrödinger-Gleichung (s.o.) eingesetzt, zwei getrennte Gleichung (Real- und Imaginärteil)

$$A'' + 2A' \cdot i \cdot \phi' + A \cdot i \cdot \phi'' - A \cdot \phi'^2 + A \frac{p^2}{\hbar^2} = 0 \quad \rightarrow \quad A'' = A \cdot \left(\phi'^2 - \frac{p^2}{\hbar^2} \right) \quad \text{und} \quad 2A' \cdot \phi' + A \phi'' = 0$$

$$\text{Zweite Gleichung} \quad (A^2 \phi')' = 0 \quad A^2 \phi' = C \quad A = \frac{C}{\sqrt{\phi'}}$$

$$\text{Erste Gleichung} \quad A'' \approx 0 \approx A \cdot \left(\phi'^2 - \frac{p^2}{\hbar^2} \right) \quad \phi' = \pm \frac{p}{\hbar} \quad \phi = \pm \frac{1}{\hbar} \int p(x) \cdot dx \quad \text{statt} \quad \frac{p}{\hbar} \cdot x$$

Ergebnis: $\psi(x) \approx \frac{C}{\sqrt{p(x)}} \cdot e^{\pm \frac{1}{\hbar} \int p(x) \cdot dx}$ **Das Integral geteilt durch \hbar ersetzt $k \cdot x$, wenn V nicht konstant ist. Die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen am Ort x zu finden, ist umso kleiner, je höher der Impuls (und damit die Geschwindigkeit) ist.**

Beispiel: unendlich hoher Potenzialtopf der Breite a mit unebenem Boden

$$\psi(x) \approx \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \cdot (C_+ \cdot e^{i \cdot \phi} + C_- \cdot e^{-i \cdot \phi}) = \frac{1}{\sqrt{p(x)}} \cdot (C_1 \cdot \sin \phi + C_2 \cdot \cos \phi)$$

$$\psi(0) = 0$$

$$\psi(a) = 0 \quad C_2 = 0 \quad \phi = \underbrace{\frac{1}{\hbar} \int_0^a p(x) \cdot dx}_{\text{statt } k \cdot a} = n \cdot \pi \quad (\text{vgl. unendlich hoher Potenzialtopf mit ebenem Boden})$$

Zurück zum Tunneleffekt beim Alpha-Zerfall

Das obige Ergebnis gilt auch für den Betrag des (imaginären) Impulses, wenn $E < V$: $\psi(x) \approx \frac{C}{\sqrt{|p(x)|}} \cdot e^{\pm \frac{1}{\hbar} \int |p(x)| \cdot dx}$
 Links, rechts und innerhalb der Barriere:

$$\psi(r < r_1) = A \cdot e^{i \cdot k \cdot r} + B \cdot e^{-i \cdot k \cdot r} \quad \psi(r > r_2) = F \cdot e^{i \cdot k \cdot r}$$

$$\psi(r_1 \leq r \leq r_2) = \frac{C}{\sqrt{|p(r)|}} e^{\frac{1}{\hbar} \int_0^r |p(\hat{r})| \cdot d\hat{r}} + \frac{D}{\sqrt{|p(r)|}} e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^r |p(\hat{r})| \cdot d\hat{r}} \quad \text{wobei} \quad C \approx 0 \quad \text{Wellenfunktion nimmt eher exponentiell ab als zu}$$

$$\frac{|F|}{|A|} \approx e^{-\frac{1}{\hbar} \int_0^r |p(\hat{r})| \cdot d\hat{r}} \quad T = e^{-2\gamma} \quad \text{mit} \quad \gamma = \frac{1}{\hbar} \cdot \int_0^r |p(\hat{r})| \cdot d\hat{r} \quad \text{Tunnel- oder Gamow-Faktor}$$

$$\gamma = \frac{1}{\hbar} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m \cdot \left(\frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{2Z \cdot e^2}{r} - E \right)} \cdot dr = \frac{1}{\hbar} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m \cdot \left(E \cdot \frac{r_2}{r} - E \right)} \cdot dr = \frac{\sqrt{2m \cdot E}}{\hbar} \cdot \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{r_2}{r} - 1} \cdot dr$$

$$1 \text{ fm} = 10^{-15} \text{ m} = 1 \text{ "Fermi"}$$

Ergebnis (nach Auswertung des Integrals):

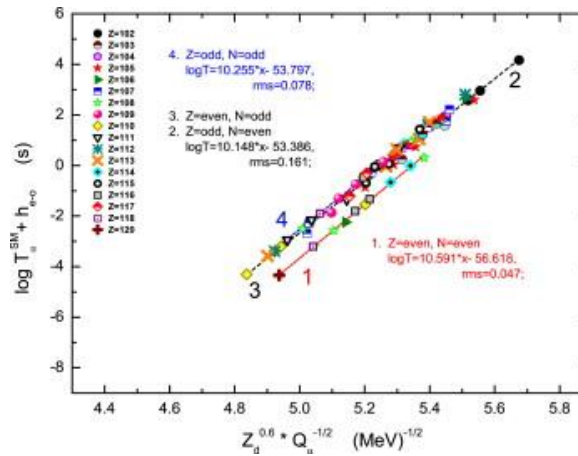
$$\gamma = K_1 \cdot \frac{Z}{\sqrt{E}} - K_2 \cdot \sqrt{Z} \cdot r_1 \quad \text{mit} \quad K_1 = 1,980 \sqrt{\text{MeV}} \quad \text{und} \quad K_2 = 1,485 \frac{1}{\sqrt{\text{fm}}}$$

Zahl der "Tunnelversuche" pro Sekunde bei Geschwindigkeit v : $\frac{v}{2r_1}$ Erfolgswahrscheinlichkeit: $\frac{v}{2r_1} \cdot e^{-2\gamma}$

Halbwertszeit (Geiger-Nuttall-Regel):

$$\tau = \frac{2r_1}{v} \cdot e^{2\gamma} = \quad \rightarrow \quad \ln \tau = -\frac{a_1}{\sqrt{E}} + a_2$$

Je höher die Energie, desto kürzer die Halbwertszeit



Hans Geiger
(1882 – 1945)