

f) Elektrisches Quadrupolmoment von Atomkernen

Ein magnetisches Dipolmoment kann man sich als durch einen Kreisstrom verursacht vorstellen.

Ein elektrisches Dipolmoment würde eine unsymmetrische Ladungsverteilung erfordern, was im Grundzustand Atomkernen nicht auftritt (bei der sog. "Riesenresonanz" können Protonen und Neutronen gegeneinander schwingen).

Eine Abweichung von der Kugelform (z.B. in Gestalt eines Rotationsellipsoiden) bewirkt ein elektrisches Quadrupolmoment. Dafür muss eine Achse ausgezeichnet sein, was bei Kernen mit Kernspin $\neq 0$ der Fall ist.

Allgemein kann eine Ladungsverteilung nach Multipolen entwickelt werden (s. Elektrodynamik):

Monopol: Skalar (gibt die Gesamtladung an)

Dipol: Vektor (hängt von der Orientierung der entgegengesetzten Ladungen ab)

Quadrupol: Tensor (hängt von der Abweichung der Kugelsymmetrie ab)

...

Für rotationssymmetrische Ladungsverteilungen um die z -Achse ist das Quadrupolmoment

$$Q \propto \int \rho(\vec{r}) \cdot (3z^2 - r^2) \cdot d\vec{r}$$

Für Kerne mit Spin 1/2 ist $|\vec{I}| = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2}} \cdot \hbar = \sqrt{\frac{3}{4}} \cdot \hbar$ und $I_z = \frac{1}{2} \cdot \hbar \rightarrow |\vec{I}|^2 = 3 \cdot I_z^2$

Im (beobachtbaren) zeitlichen Mittel gilt damit für jeden Punkt der Ladungsverteilung $r^2 = 3 \cdot z^2 \rightarrow Q = 0$

Ein beobachtbares Quadrupolmoment ergibt also nur für Kerne mit $I \geq 1$.

Unter der Annahme eines Ellipsoid mit den Halbachsen a und b ist der mittlere Radius $\langle r \rangle = \sqrt[3]{a \cdot b^2}$

$a > b$: Kern ist "prolat" (zigarrenförmig)

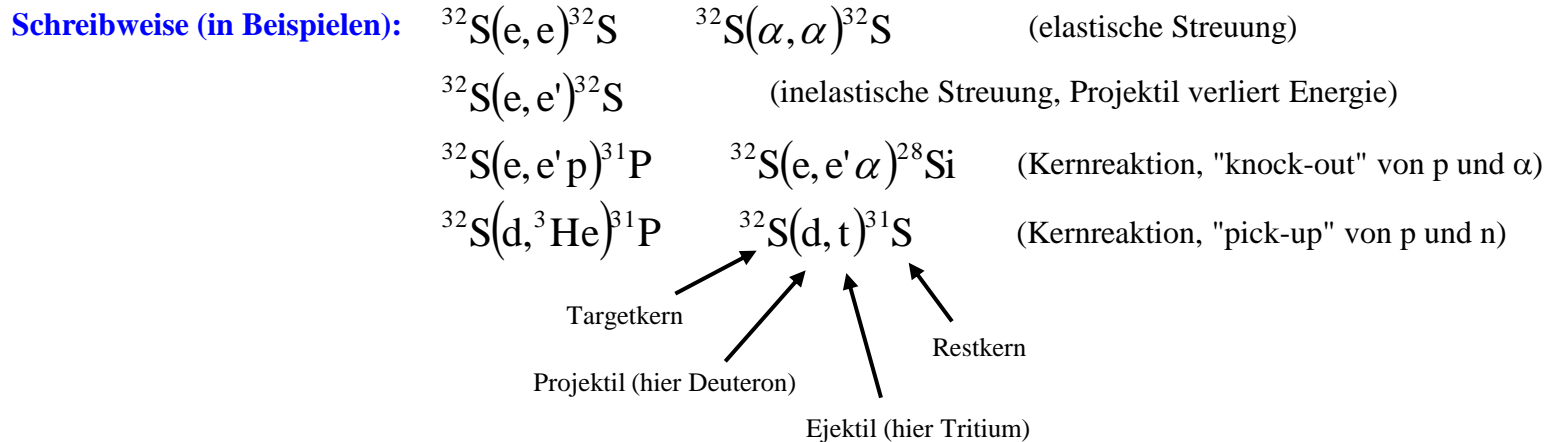
$a < b$: Kern ist "oblat" (scheibenförmig)

Der Deformationsparameter $\delta = \Delta R / \langle R \rangle$ ist typisch um 0,01, kann aber Werte bis ca. 0,1 annehmen.

Bestimmung der Quadrupolmoments: Vermessung der Hyperfeinstruktur der Elektronenhülle.

3.2 Streuprozesse

- elastische Streuung
- inelastische Streuung (Kern wird angeregt)
- reaktive Streuung, Kernreaktionen (Kern wird verändert)



Coulomb-Streuung:

Energiesatz mit Abstand δ zwischen Projektil und Targetkern

$$\frac{1}{2} m v_0^2 = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{\delta}$$

kleinster Abstand δ_0 mit $v = 0$
 beim zentralen Stoß (Stoßparameter $b = 0$)

$$\frac{1}{2} m \cdot v_0^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{\delta_0} \rightarrow \delta_0 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{m \cdot v_0^2}$$

Der Stoßparameter b ist der Abstand zwischen der Bahn des Projektils weit vor dem Stoß und der Achse durch den Targetkern. Es gibt eine eindeutige und einfache Beziehung zwischen b und dem Streuwinkel θ bei der elastischen Streuung an $1/r$ -Potentialen (deren Herleitung aus Physik I, Stöße oder Bewegung im $1/r$ -Potential, bekannt sein könnte):

$$b = \frac{\delta_0}{2} \cot(\theta/2)$$

Herleitung:

Drehimpuls vor dem Stoß = Drehimpuls im Abstand r

$$L = m \cdot v_0 \cdot b = m \cdot r \frac{d\varphi}{dt} \cdot r \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{v_0 \cdot b} \frac{d\varphi}{dt}$$

Ablenkende Kraft in y -Richtung, aus der Zeichnung:

$$F_y = m \cdot \frac{dv_y}{dt} = \frac{a}{r^2} \sin \varphi \quad \rightarrow \quad \frac{dv_y}{dt} = \frac{a \cdot \sin \varphi}{m \cdot v_0 \cdot b} \frac{d\varphi}{dt}$$

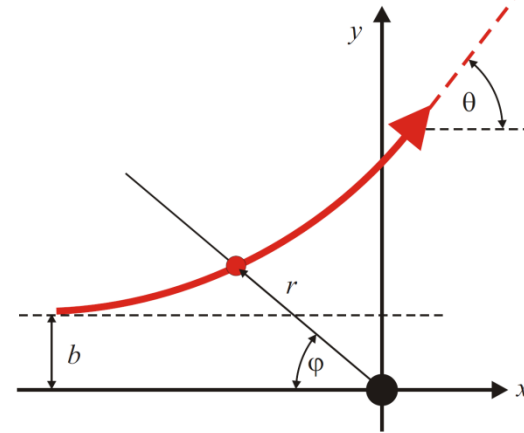
Integriert:

$$t = -\infty: \quad v_y = 0 \quad \varphi = 0$$

$$t = +\infty: \quad v_y = v_0 \cdot \sin \theta \quad \varphi = \pi - \theta$$

$$\int_0^{v_0 \sin \theta} dv_y = \frac{a}{m \cdot v_0 \cdot b} \int_0^{\pi - \theta} \sin \varphi \cdot d\varphi \quad \rightarrow \quad v_0 \cdot \sin \theta = \frac{a}{m \cdot v_0 \cdot b} \{-\cos(\pi - \theta) + 1\}$$

$$b = \frac{a}{m \cdot v_0^2} \cot(\theta/2) \quad \text{mit} \quad \cot(\theta/2) = (\cos \theta + 1) / \sin \theta$$



Häufigkeit der Streueignisse als Funktion des Winkels:

Je größer der Streuwinkel, desto kleiner der Stoßparameter und desto seltener das Streueignis, hier ausgedrückt durch den differentiellen Wirkungsquerschnitt. Zur folgenden Herleitung wird benötigt:

$$\frac{db}{d\theta} = \frac{a}{m \cdot v_0^2} \cdot \frac{d \cos(\theta/2)}{d\theta \sin(\theta/2)} = \frac{a}{m \cdot v_0^2} \cdot \frac{-1/2 \cdot \sin(\theta/2) - 1/2 \cdot \cos(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)}$$

$$\left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{a}{2m \cdot v_0^2} \cdot \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \quad \text{mit} \quad a = \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0} \quad (\text{Coulomb-Streuung})$$

Herleitung der Coulomb-Streufornel

Den Wirkungsquerschnitt σ kann man sich als eine Fläche vorstellen, die jedem Streuzentrum (z.B. Atomkern) zugeordnet ist. Wird diese Fläche von einem Projektil getroffen, findet ein definiertes Streueignis statt.

A = Fläche

n = Zahl der Streuzentren pro Flächeneinheit

$A \cdot n$ = Zahl der Streuzentren in der Fläche A

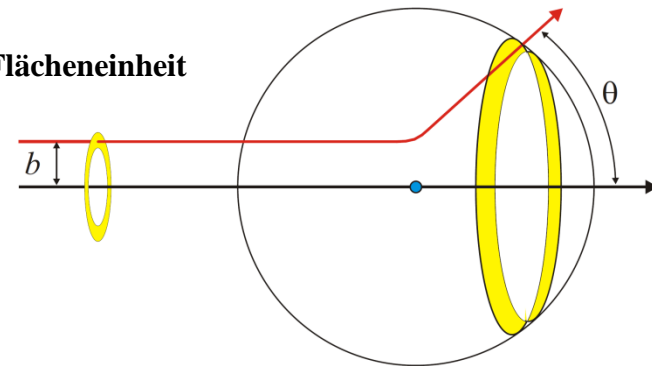
$\sigma \cdot A \cdot n$ = Fläche der Streuzentren in der Fläche A

j = Stromdichte der Projektile = Projektile pro Zeiteinheit und Flächeneinheit

$$\frac{\text{Ereignisse}}{dt} = j \cdot n \cdot A \cdot \sigma$$

$$\frac{\text{Ereignisse}/dt}{j \cdot n \cdot A} = \sigma \quad (\text{totaler Wirkungsquerschnitt})$$

$$\frac{\text{Ereignisse}/dt}{j \cdot n \cdot A \cdot d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (\text{differenzieller Wirkungsquerschnitt})$$



Teilchen mit einem Stoßparameter b werden eindeutig um einen bestimmten Winkel θ abgelenkt. Damit: Fläche des Kreisrings (s. Bild) = Wirkungsquerschnitt für die Streuung in das Winkelintervall θ bis $\theta + d\theta$

$$2\pi \cdot b \cdot db = \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot d\omega = \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot 2\pi \cdot \sin \theta \cdot d\theta$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = b \cdot \left| \frac{db}{d\theta} \right| \cdot \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{mit } b \text{ und } db/d\theta \text{ von oben: } \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a}{m \cdot v_0^2} \cot(\theta/2) \cdot \frac{a}{2m \cdot v_0^2} \cdot \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \cdot \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\sin \theta = 2 \cdot \sin(\theta/2) \cdot \cos(\theta/2)$$

$$\text{und } a = \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0} \rightarrow$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot m \cdot v_0^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

Coulomb-Streufornel

Beispiel: Rutherford'sche Streuversuche

$$p = \hbar k = \frac{h}{\lambda} \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

Energie der α -Teilchen ~ 5 MeV

→ De-Broglie-Wellenlänge

$$1) \lambda = \frac{h}{\sqrt{2m \cdot E_{kin}}} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}}{\sqrt{8 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2}} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}}{10,3 \cdot 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m}/\text{s}} = 6 \text{ fm}$$

$$2) \lambda = \frac{2\pi \cdot \hbar \cdot c}{\sqrt{2mc^2 \cdot E_{kin}}} = \frac{2\pi \cdot 197,3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{\sqrt{8 \cdot 938 \text{ MeV} \cdot 5 \text{ MeV}}} = \frac{1240 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{194 \text{ MeV}} = 6 \text{ fm}$$

Diese Wellenlänge ist zu groß, um die Dichteverteilung des Kerns zu vermessen. Bei kleinerem λ zeigt die Winkelverteilung ein Beugungsmuster (Minima und Maxima), das von der Dichteverteilung abhängt.

Außerdem ist zu bedenken:

- Elektronen als Projektile sind nur auf die Coulombkraft, d.h. auf die Ladungsverteilung empfindlich,
- auf α -Teilchen wirken sowohl die Coulombkraft als auch die Kernkräfte,
- die reine Massenverteilung könnte mit hochenergetischen Neutronen bestimmt werden.

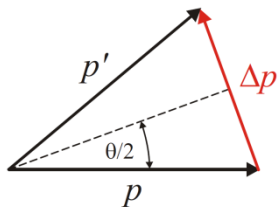
Die Ladungsverteilung wurde mit hochenergetischen Elektronen eingehend untersucht (R. Hofstadter um 1960).

Die Ergebnisse werden oft als Funktion des Impulsübertrags statt des Streuwinkels ausgedrückt:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p} - \vec{p}' \quad \text{wenn } |\vec{p}| = |\vec{p}'| \text{ (elastisch):}$$

$$\sin(\theta/2) = \frac{\Delta p}{2p} = \frac{\Delta p}{2m \cdot v_0}$$

$$\left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Coul} = 4 \cdot \left(\frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2 \cdot m}{4\pi \cdot \epsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{\Delta p^4}$$



für eine ausgedehnte Ladungsverteilung:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Coul} \cdot \left| \int \rho(\vec{r}) \cdot e^{i \frac{\Delta p}{\hbar} \vec{r}} d\vec{r} \right|^2$$

Formfaktor

Quadrat der Fourier-Transformierten der Ladungsverteilung

