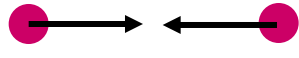



Skalarprodukt des Viererimpulses ist invariant

- zu verschiedenen Zeiten z.B. vor und nach der Reaktion
- in verschiedenen Systemen z.B. Laborsystem und Schwerpunktsystem

$$P \cdot P \equiv \frac{E^2}{c^2} - p_x^2 - p_y^2 - p_z^2 = m_0^2 c^2$$

Zweites Rechenbeispiel: Zwei geladene Teilchen gleicher Ruhemasse m bewegen sich mit entgegengesetzt gleichem Impuls im Laborsystem aufeinander zu. Wie groß ist die kinetische Energie eines Teilchens im Ruhesystem des anderen Teilchens im Vergleich zur kinetischen Energie im Laborsystem?

Gesamtenergie	E_1		$E_2 = E_1$		E'_1		mc^2
kin. Energie	T_1		$T_2 = T_1$		T'_1		0
Impuls	\vec{p}_1		$\vec{p}_2 = -\vec{p}_1$		\vec{p}'_1		0
Geschwindigkeit	\vec{v}_1		$\vec{v}_2 = -\vec{v}_1$		\vec{v}'_1		0

(i) Nicht-relativistisch: $v'_1 = 2v_1 \rightarrow T'_1 = 4T_1$

(ii) Relativistisch: Viererimpulse in beiden Systemen $P = \left(2 \frac{E_1}{c}, 0, 0, 0 \right)$ $P' = \left(\frac{E'_1}{c} + mc, p'_1, 0, 0 \right)$

$$P^2 = P'^2 \quad 4 \frac{E_1^2}{c^2} = \left(\frac{E'_1}{c} + mc \right)^2 - p_1'^2 = \frac{E_1'^2}{c^2} + 2mE'_1 + m^2c^2 - \frac{E_1'^2}{c^2} + m^2c^2 = 2mE'_1 + 2m^2c^2$$

$$E'_1 = 2 \frac{E_1^2}{mc^2} - mc^2$$

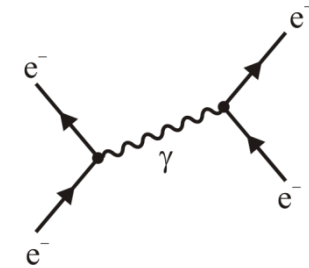
$$T'_1 = E'_1 - mc^2 = \frac{2}{mc^2} (T_1^2 + 2T_1mc^2 + m^2c^4) - 2mc^2 = \frac{2}{mc^2} (T_1^2 + 2T_1mc^2)$$

$$T'_1 = 4T_1 \left(1 + \frac{T_1}{2mc^2} \right)$$

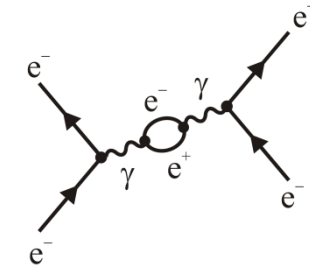
Gegenüber dem nicht-relativistischen Ergebnis gibt es also einen Zusatzgewinn an kinetischer Energie, wenn T_1 mit der Ruheenergie vergleichbar oder größer ist.

Wiederholung: Feynman-Diagramme

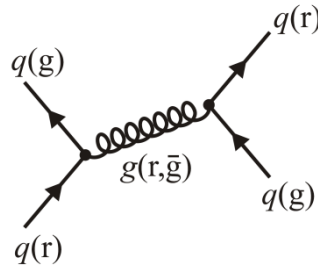
- elektromagnetische Wechselwirkung



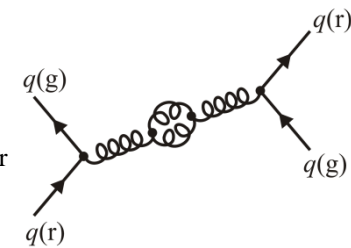
höhere Ordnung:
Elektron-Positron,
weitere Photonen
...



- starke Wechselwirkung

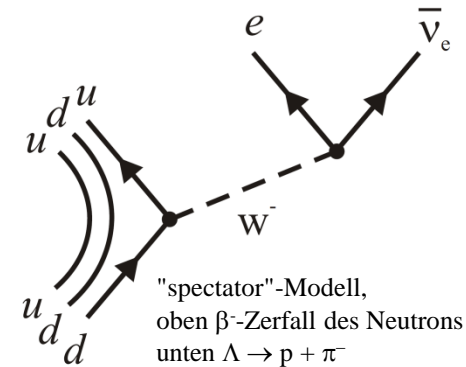
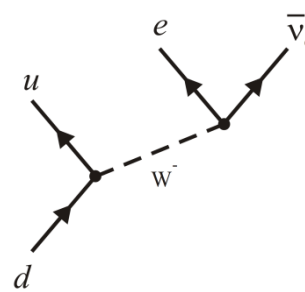
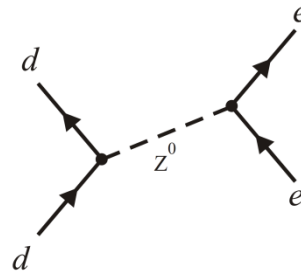


höhere Ordnung:
auch Gluonen
können miteinander
wechselwirken

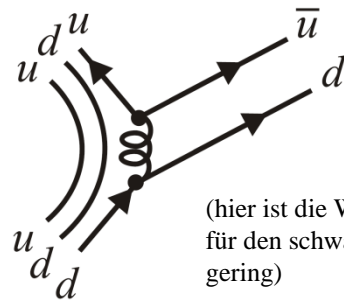
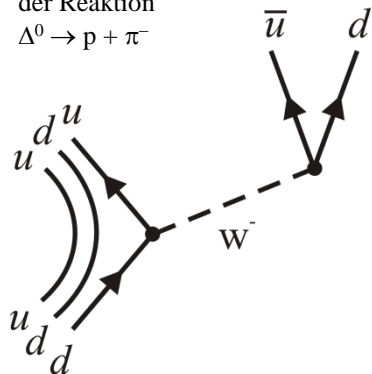


- schwache Wechselwirkung

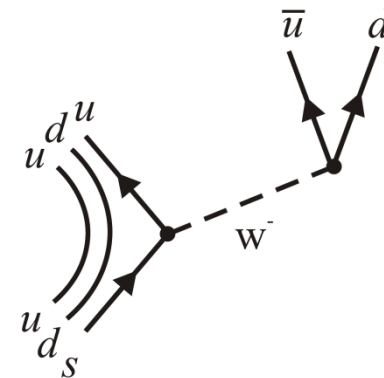
neutrale und geladene "Ströme"



zwei verschiedene Varianten
der Reaktion
 $\Delta^0 \rightarrow p + \pi^-$



(hier ist die Wahrscheinlichkeit
für den schwachen Prozess sehr
gering)



5.5 Gebundene Quarkzustände

Nichtrelativistische Theorie
Schrödinger-Gleichung

$$\vec{p} \rightarrow -i\hbar\nabla \quad E \rightarrow i\hbar\frac{\partial}{\partial t} \quad \frac{p^2}{2\mu} = E \rightarrow \left(-\frac{\hbar^2}{2\mu}\nabla^2 + V \right) \Psi = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\Psi$$

Normierung und
zeitunabhängiges Potenzial

$$\int |\Psi|^2 d^3x = 1 \quad \Psi(x, y, z, t) = \psi(x, y, z) \cdot f(t) \quad f(t) = e^{-i(E/\hbar)t}$$

Produktansatz in Kugelkoordinaten

$$\psi(x, y, z) \rightarrow \psi(r, \theta, \varphi) = R(r) \cdot \Theta(\theta) \cdot \Phi(\varphi) = R(r) \cdot Y_l^m(\theta, \varphi)$$

Radialgleichung mit
Zentrifugalterm

$$u(r) \equiv r \cdot R(r) \quad -\frac{\hbar^2}{2\mu} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \left\{ V(r) + \frac{\hbar^2}{2\mu} \cdot \frac{l(l+1)}{r^2} \right\} \cdot u = E \cdot u$$

Die Winkelabhängigkeit ist durch Kugelflächenfunktionen gegeben,
die radiale Wellenfunktion hängt von der Form des Potentials $V(r)$ ab.

Im Fall des Wasserstoffatoms

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r} \rightarrow E_n = -\frac{\mu \cdot e^4}{8\epsilon_0 \cdot \hbar^2 \cdot n^2} = -\frac{R}{n^2} \quad R_\infty = 13,6 \text{ eV}$$

$$E_\gamma = h \cdot \nu = \hbar \cdot \omega = R \cdot \left(\frac{1}{n_1^2} - \frac{1}{n_2^2} \right)$$

Korrekturen:

- **Feinstruktur** (relativistische Korrektur, Spin-Bahn-Kopplung) $\Delta E_{FS} = -E_n \frac{\alpha^2}{n} \left(\frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right)$

- **Lamb-Verschiebung** (Feynman-Diagramme höherer Ordnung)

- **Hyperfeinstruktur** (Einfluss des Kernspin I) $\vec{F} = \vec{j} + \vec{I}$
z.B. Spinflip im Wasserstoff-Grundzustand: 21-cm-Linie

$$\Delta E_{HFS} = \frac{A}{2} \cdot \{ F(F+1) - j(j+1) - I(I+1) \}$$

$$j = \frac{1}{2} \quad I = \frac{1}{2} \quad \Delta E_{HFS}^{F=0} = -\frac{3}{4} A \quad \Delta E_{HFS}^{F=1} = \frac{1}{4} A$$

Varianten:

Wasserstoffähnliche Atome: Kerne mit Ladung Z und einem einzigen Elektron

Myonische Atome: Kerne mit Ladung Z und einem negativen Myon (statt Elektron)

Positronium: Positron (statt Atomkern) und Elektron

- Besonderheiten:
- reduzierte Masse wichtig
 - Feinstruktur und Hyperfeinstruktur in gleicher Größenordnung
 - Energieverschiebung durch Annihilationsterm

$$\mu = \frac{m_e m_e}{m_e + m_e} = \frac{1}{2} m_e \quad \rightarrow \quad E_n = -\frac{R}{2n^2}$$

Entdeckung: 1951 MIT (M. Deutsch), Lebensdauer Parapositronium ($S = 0$) 0,13 ns $e^+e^- \rightarrow 2\gamma$
 Orthopositronium ($S = 1$) 142 ns $e^+e^- \rightarrow 3\gamma$

Quarkonium: ein schweres Quark (nichtrelativistisch!) und das entsprechende Antiquark, Wechselwirkung bei kurzen Abständen der el.mag. Wechselwirkung ähnlich, Modellpotenzial:

$$V(r) = -\frac{4}{3} \frac{\alpha_s \hbar c}{r} + f_0 r$$

Entdeckte Quarkonium-Systeme:

- Charmonium 1974: J/ψ ist ein 1^3S_1 -Zustand (wegen der Erzeugung durch ein virtuelles Photon in e^+e^- -Kollisionen muss es Spin 1 tragen. Die Zustände mit $n = 2, 3$, usw. heißen ψ' , ψ'' usw. Zustände mit Spin 0 heißen η_c , P -Zustände heißen χ).
- Bottonium 1977: das Y -Meson ist ebenfalls ein 1^3S_1 -Zustand. Das Y''' oder $Y(4S)$ mit Masse 10,6 GeV zerfällt in zwei B -Mesonen und bildet die Grundlage für die B -Physik in sog. "B-Fabriken" (e^+e^- -Kollisionsmaschinen mit hoher Luminosität d.h. Erzeugungsrate für Y -Mesonen).

$$Y(4S) \rightarrow B^0 + \bar{B}^0 \qquad b\bar{b} \rightarrow \bar{b}d + b\bar{d}$$

$$Y(4S) \rightarrow B^+ + B^- \qquad b\bar{b} \rightarrow \bar{b}u + b\bar{u}$$