

5.5 Kernmodelle: Das Schalenmodell

Einteilchenmodell zur Beschreibung eines Vielteilchensystem:

Jedes einzelne Nukleon bewegt sich im Kernpotenzial, das von der Gesamtheit der Nukleonen erzeugt wird.

Zunächst:

Das Fermigasmodell

Das Nukleon bewegt sich quasi frei in einem Potenzialtopf mit steilen Wänden, im einfachsten Fall durch ein dreidimensionales Kastenpotenzial der Breite a mit unendlich hohen Wänden beschrieben.

$$E_{pot} = \begin{cases} 0 & \text{für } r < a \\ \infty & \text{für } r \geq a \end{cases} \quad \rightarrow \quad -\frac{\hbar^2}{2m} \Delta\psi = E \cdot \psi \quad \psi(x, y, z) = \psi_x(x) \cdot \psi_y(y) \cdot \psi_z(z)$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_x = E_x \cdot \psi_x$$

$$E = E_x + E_y + E_z$$

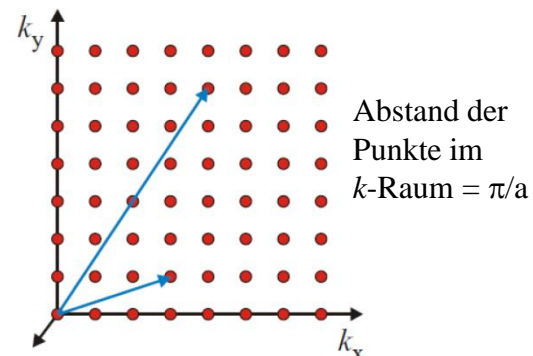
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \psi_x = k_x^2 \cdot \psi_x \quad \rightarrow \quad \psi_x = A_1 \cdot \sin(k_x \cdot x) \quad \text{mit} \quad k_x = n_x \cdot \pi / a \quad \text{und analog für } y \text{ und } z$$

$$E_x = \frac{\hbar^2 \cdot \pi^2}{2m \cdot a^2} n_x^2$$

$$E = \frac{\hbar^2 \cdot \pi^2}{2m \cdot a^2} (n_x^2 + n_y^2 + n_z^2)$$

Die Zahl der möglichen Zustände mit Energiewerten von 0 bis E_{max} ist durch die Zahl der Gitterpunkte im erreichbaren k -Raum gegeben (ein Oktant einer Kugel mit "Radius" k_{max}):

$$n = \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot \left(\frac{k_{max}}{\pi/a} \right)^3 = \frac{\pi}{6} \cdot \left(\frac{p_{max}/\hbar}{\pi/a} \right)^3 = \frac{a^3}{6\pi^2 \cdot \hbar^3} (2m \cdot E_{max})^{3/2}$$



Da Nukleonen Spin-1/2-Teilchen sind, kann jedes Niveau zweimal besetzt werden. Die Energie, bis zu der der Potenzialtopf mit Teilchen gefüllt wird, heisst Fermi-Energie E_F . Die Gesamtzahl der Zustände ist:

$$n_F = \frac{a^3}{3\pi^2 \cdot \hbar^3} (2m \cdot E_F)^{3/2} = \frac{V}{3\pi^2 \cdot \hbar^3} (2m \cdot E_F)^{3/2}$$

Zustandsdichte: $\frac{dn}{dE} = \frac{(2m)^{3/2} \cdot V}{3\pi^2 \cdot \hbar^3} \cdot \frac{3}{2} \cdot E^{1/2}$

$$n_F^{2/3} = \frac{2m}{\hbar^2} E_F \cdot \left(\frac{V}{3\pi^2} \right)^{2/3} \rightarrow E_F = \frac{\hbar^2}{2m} \left(\frac{3\pi^2}{V} n_F \right)^{2/3}$$

Die Zustände liegen also mit zunehmender Energie dichter

Die Fermi-Energie kann nun mit der bekannten Dichte von Kernmaterie explizit berechnet werden, wobei die Zahl der Nukleonen bis zur Fermi-Energie A ist:

$$\frac{n_F}{V} = \frac{A}{(4/3)\pi \cdot r_0^3 \cdot A} \approx 10^{44} \frac{1}{\text{m}^3} \rightarrow E_F = \frac{(6,6 \cdot 10^{-22} \text{ MeVs})^2 \cdot (3 \cdot 10^8 \text{ m/s})^2}{2 \cdot 938 \text{ MeV}} \left(30 \cdot 10^{44} \frac{1}{\text{m}^3} \right)^{2/3}$$

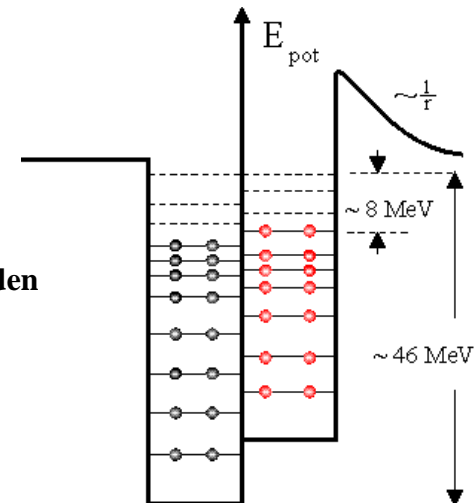
$$E_F \approx 42 \text{ MeV}$$

Mit Bindungsenergien pro Nukleon um 8 MeV beträgt die Tiefe des Potenzialtopfes typischerweise 50 MeV und hängt nur wenig von der Größe des Kerns ab.

Ein etwas besseres Modell berücksichtigt die Coulomb-Abstoßung der Protonen, d.h. Protonen und Neutronen haben jeweils ihren eigenen Potenzialtopf, der für die Protonen etwas höher liegt und eine Coulomb-Barriere besitzt. Beide Töpfe sind etwa gleich hoch mit Nukleonen gefüllt (sonst würde sich ein Proton in ein Neutron umwandeln oder umgekehrt).

Ferner kann man das Kastenpotenzial durch einen Topf mit weniger steilen Wänden ersetzen, z.B. durch das eines harmonischen Oszillators oder durch das sog. Woods-Saxon-Potenzial

$$V(r) = -\frac{V_0}{1 + e^{(r-R)/b}}$$



Bei der Bindungsenergie pro Nukleon zeigte sich bereits, dass es **magische Zahlen 2, 8, 20, 28, 50, 82, 126** gibt, die mit dem Kastenpotenzial nicht erklärt werden. Die Bindungsenergie ist

$$E_B(Z, N) = (Z \cdot m_p + N \cdot m_n - m(Z, N)) \cdot c^2$$

Die Separationsenergie E_S für ein Nukleon ergibt sich einerseits aus

$$E_S = E_0 - E_F$$

wobei E_0 die Tiefe des Potenzials und die Fermi-Energie E_F die Energie ist, bis zu der der Potenzialtopf gefüllt ist, also die maximale kinetische Energie eines Nukleons. Ferner erhält man E_S aus

$$E_S(p) = E_B(Z, N) - E_B(Z - 1, N)$$

$$E_S(n) = E_B(Z, N) - E_B(Z, N - 1)$$

Auch an den Separationsenergien erkennt man die magischen Zahlen. Als Funktion von Z und N ähnelt ihr Verlauf den Ionisierungsenergien der Atomhülle, die bei vollständig abgeschlossenen Schalen besonders hoch ist.

Wenn das Potenzial bekannt wäre, könnte man die Schrödinger-Gleichung lösen, wobei man bei einem kugelsymmetrischen Potenzial den Radial- und Winkelanteil separat behandeln kann. Für den Winkelanteil ergeben sich wieder Kugelflächenfunktionen, die von den Quantenzahlen des Drehimpulses l und seiner Orientierung m abhängen. Für die radiale Lösung $R(r)$ gilt

$$u(r) = r \cdot R_n(r) \quad \frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{2\mu}{\hbar^2} \left(E - V(r) - \frac{l \cdot (l+1) \cdot \hbar^2}{2\mu \cdot r^2} \right) \cdot u = 0$$

Bei verschiedenen Potenzialen (z.B. endlich hoher Kasten, harmonischer Oszillator etc.) zeigt sich, dass die magischen Zahlen für die vollständige Besetzung einer "Schale" (gegeben durch die Hauptquantenzahl n) nur für niedrige n reproduziert werden. **Das liegt daran, dass - im Gegensatz zur Atomhülle - die Spin-Bahn-Kopplung zu einer starken Aufspaltung der Energieniveaus führt**, die mit den n -abhängigen Niveauabständen vergleichbar ist.

$$V(r) \rightarrow V(r) + V_{ls}(r) \cdot \vec{l} \cdot \vec{s}$$



Hans Jensen
(1907 - 1973)



Maria Goeppert-Mayer
(1906 - 1972)

Wie beim Drehimpuls der Atomhülle:

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \quad \vec{j}^2 = \vec{l}^2 + \vec{s}^2 + 2 \cdot \vec{l} \cdot \vec{s}$$

$$\vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{1}{2} \{ \vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2 \} = \frac{\hbar^2}{2} \{ j \cdot (j+1) - l \cdot (l+1) - s \cdot (s+1) \}$$

Es gibt nur zwei Möglichkeiten:

$$s = +\frac{1}{2}; \quad j = l + \frac{1}{2}:$$

$$\vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{\hbar^2}{2} \left\{ \left(l + \frac{1}{2} \right) \cdot \left(l + \frac{3}{2} \right) - l \cdot (l+1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right\} = \frac{\hbar^2}{2} \left\{ l^2 + 2l + \frac{3}{4} - l^2 - l - \frac{3}{4} \right\} = \frac{\hbar^2}{2} \cdot l$$

$$s = -\frac{1}{2}; \quad j = l - \frac{1}{2}:$$

$$\vec{l} \cdot \vec{s} = \frac{\hbar^2}{2} \left\{ \left(l - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(l + \frac{1}{2} \right) - l \cdot (l+1) - \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \right\} = \frac{\hbar^2}{2} \left\{ l^2 - \frac{1}{4} - l^2 - l - \frac{3}{4} \right\} = -\frac{\hbar^2}{2} \cdot (l+1)$$

Die Energiedifferenz ist $\Delta E = V_{ls} \frac{\hbar^2}{2} \cdot (2l+1)$ wobei (wie sich herausstellt) $V_{ls} < 0$ ist.

Mit numerischen Rechnungen und geeigneten Potenzialen werden die magischen Zahlen reproduziert. Außerdem zeigt sich experimentell, dass Kerne mit abgeschlossenen Schalen kein elektrisches Quadrupolmoment besitzen, also - wie erwartet - kugelsymmetrisch sind. Der Kernspin eines Kerns mit einem Nukleon außerhalb einer abgeschlossenen Schale wird durch dieses Nukleon bestimmt. Bei mehreren Nukleonen liegt *jj*-Kopplung (wie bei Elektronen schwerer Elemente) vor.

$$\vec{I} = \sum_i \vec{j}_i \quad \text{mit} \quad \vec{j}_i = \vec{l}_i + \vec{s}_i$$

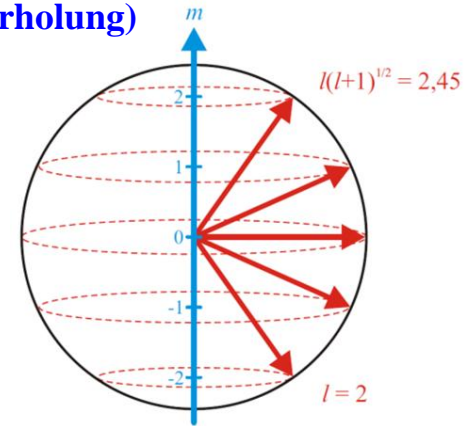
Anmerkungen zu Drehimpulsen/Spins in der Quantenmechanik (Wiederholung)

Für Drehimpulse, Spins oder Gesamtdrehimpulse der Elektronenhülle oder der Kerne gelten dieselben Regeln. Unterschiede ergeben sich in ihrer Auswirkung auf messbare magnetische Momente (z.B. Landé-Faktor des Elektrons ≈ 2). Die Drehimpuls/Spin-Quantenzahl (hier j genannt) ist ganzzahlig oder halbzahlig. Der Drehimpuls/Spin ist ein Vektor mit Betrag

$$|\vec{j}| = \sqrt{j \cdot (j + 1)} \cdot \hbar$$

Die magnetische Quantenzahl gibt die Ausrichtung des Vektors in einem äußeren Magnetfeld B_z an:

$$-j \leq m \leq j \quad j_z = m \cdot \hbar$$



Kopplung von zwei Drehimpulsen

Bei der Kopplung von zwei Drehimpulsen, Spins oder Gesamtdrehimpulsen, hier j genannt, sind drei Drehimpulsquantenzahlen und drei magnetische Quantenzahlen beteiligt:

$$\begin{matrix} j_1 & j_2 & j \\ m_1 & m_2 & m \end{matrix}$$

Es gelten zwei einfache Regeln:

- (i) Die resultierende magnetische Quantenzahl ist die Summe der beiden anderen: $m_1 + m_2 = m$
- (ii) Für die Drehimpulsquantenzahl gilt eine "Dreiecksungleichung": $|j_1 - j_2| \leq j \leq j_1 + j_2$

Einen Drehimpuls j mit magnetischer Quantenzahl m kann man durch eine Entwicklung darstellen:

$$|jm\rangle = \sum (j_1 m_1 j_2 m_2 | jm) \cdot |j_1 m_1\rangle \cdot |j_2 m_2\rangle \quad \text{Summe über alle erlaubten Kombinationen}$$

Die Entwicklungskoeffizienten hängen von allen sechs Quantenzahlen ab und heißen Clebsch-Gordon-Koeffizienten (eine andere Darstellung sind die sog. $3j$ -Symbole). Die Regeln zu ihrer Berechnung finden sich in fortgeschrittenen Lehrbüchern der Quantenmechanik. Bei Kopplungen, die den obigen zwei Regeln widersprechen, sind die Koeffizienten null. Bei der Anwendung der Regeln sollte man sich von der geometrischen Vorstellung der Addition zweier Vektoren

$$\vec{j} = \vec{j}_1 + \vec{j}_2$$

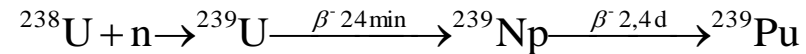
etwas lösen: die beiden magnetischen Quantenzahlen m_1 und m_2 verlieren ihre Bedeutung. Zum Beispiel geben sie nicht die relative Orientierung der beiden koppelnden Vektoren an.

Kernspaltung von Uran

Die stoßinduzierte Spaltung schwerer Elemente ist exotherm, weil die Bindungsenergie pro Nukleon für die Spaltfragmente höher ist (Maximum bei $A \approx 60$). Hier ist insbesondere die Spaltung von Uran-Isotopen durch Neutronenbeschuss von praktischer Relevanz. Man kann sich den Prozess als Einfang eines Neutrons vorstellen, wobei der so entstandene Kern (im Bild des Tröpfchensmodells) schwingt und an einer Einschnürung ungefähr in der Mitte zerreißt.

Das häufigste Uranisotop ist der g-g-Kern ^{238}U (Z gerade, N gerade, 99,27 %) , der durch Neutroneneinfang zu einem g-u-Kern wird. Die freiwerdende Bindungsenergie reicht nicht zur Spaltung, sondern das Neutron muss zusätzlich ca. 1 MeV an kinetischer Energie beitragen.

Das Isotop ^{235}U (0,72 %) dagegen kann auch mit langsamen Neutronen gespalten werden. Der Spaltungs-Wirkungsquerschnitt nimmt sehr stark mit der Neutronenenergie ab (bei 1 MeV Faktor 1000 kleiner als für "thermische" Neutronen bei einigen 10 meV), so dass ^{235}U wesentlich besser spaltbar ist als ^{238}U . Aus diesem Grund wird Uran "angereichert", d.h. sein Gehalt an ^{235}U gegenüber dem natürlichen Vorkommen erhöht. Ähnliches gilt für Plutonium-Isotope mit ungerader Massenzahl, das in der Natur praktisch nicht vorkommen. Das Isotop ^{239}Pu entsteht in Kernkraftwerken aus ^{238}U :



Kernfusion

Die Fusion leichter Elemente ist exotherm. Dazu müssen sich die Kerne quasi berühren, d.h. die Coulomb-Barriere muss durch ein genügend hohe kinetische Energie oder durch Tunneleffekt überwunden werden. Kinetische Energie (r_1 und r_2 sind die jeweiligen Reichweiten der Kernkräfte vom Kernmittelpunkt \approx Radien) :

$$E_{kin} \geq \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \cdot \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{r_1 + r_2}$$

Im Inneren der Sonne entsteht hauptsächlich aus Wasserstoff über einen mehrstufigen Prozess über Be, B und Li schließlich ^4He (p-p-Kette). In anderen Sternen fusioniert Wasserstoff zunächst mit ^{12}C und bildet über N und O ebenfalls ^4He (CNO- oder Bethe-Weizsäcker-Zyklus). Im Stätstadium der Sternentwicklung gibt es (je nach Masse des Sterns) Fusionsprozesse, die zu schwereren Elementen bis Fe führen (Heliumbrennen erzeugt ^{12}C , Sauerstoffbrennen erzeugt u.a. ^{28}Si , Siliziumbrennen erzeugt u.a. ^{56}Fe , u.s.w.). Noch schwerere Elemente entstehen nur in Supernova-Explosionen.

5.6 Anwendungen der Kernphysik: Energiegewinnung durch Kernspaltung

Freierwerdende Energie bei der Spaltung eines ^{235}U -Kerns:

167 MeV kin. Energie der Spaltprodukte

6 MeV kin. Energie der Neutronen

7 MeV Photonen, die während der Spaltung entstehen (γ -Strahlung)

6 MeV Photonen aus dem Zerfall der Spaltprodukte

5 MeV Elektronen aus dem β^- -Zerfall der Spaltprodukte

10 MeV Antineutrinos aus dem β^- -Zerfall der Spaltprodukte

201 MeV Summe

Chemische Verbrennung: wenige eV.

Kettenreaktion

Bei der Spaltung eines Urankerns durch Beschuss mit einem Neutron werden 2-3 Neutronen freigesetzt, die ihrerseits wieder Urankerne spalten können. Die Zahl solcher Reaktionen pro Zeiteinheit kann exponentiell anwachsen (Kernwaffe), oder durch eine Regelung von Neutronenenergie und -fluss konstant gehalten werden (Reaktor).

Wirkungsquerschnitt für die Spaltung von ^{235}U mit Neutronen $\sigma \propto \frac{1}{\sqrt{E_{kin}}}$ plus Resonanzen im Bereich 10-800 eV.

Um eine Kettenreaktion aufrecht zu erhalten, müssen Neutronen, die mit kinetischen Energien im MeV-Bereich entstehen, verlangsamt ("moderiert") werden. Als Moderatoren werden Materialien verwendet (Wasser, schweres Wasser D_2O , Graphit), die leichte Kerne enthalten, bei denen also ein elastischer Stoß viel Energie überträgt, die andererseits möglichst wenige Neutronen absorbieren.

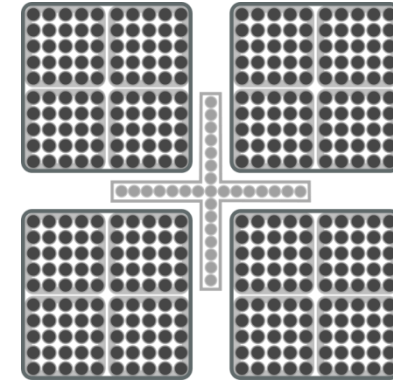
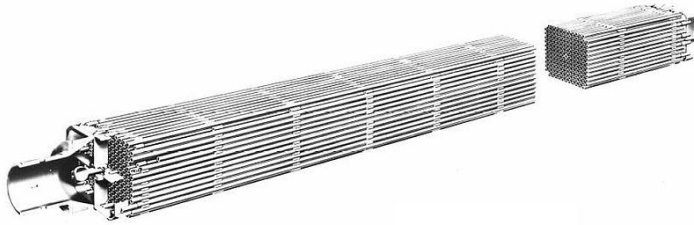
> 1 überkritisch

Vermehrungsfaktor der Neutronen $k = 1$ kritisch $k_\infty = \eta \cdot \varepsilon \cdot p \cdot f$ (Vierfaktorenformel)

< 1 unterkritisch

$\eta > 1$ ist die Zahl schneller Neutronen, die pro Neutron der vorhergehenden Generation erzeugt werden,
 $\varepsilon > 1$ berücksichtigt, dass die Neutronenzahl dadurch erhöht wird, dass schnelle Neutronen ^{238}U spalten,
 p ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Neutron nicht durch Resonanz von einem U-Kern eingefangen wird,
 f ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Neutron nicht vom Moderator absorbiert wird,
 der Index ∞ steht für die Näherung eines beliebig großen Reaktors (geometrische Entweichwahrscheinlichkeit 0)

Kernreaktoren



Typische Bauart in Deutschland

- i.d.R. inhomogener Reaktor: Kernbrennstoff und Moderator sind nicht vermischt, sondern räumlich getrennt
- Moderator ist das Wasser des primären Kühlkreislafs
- Druckwasserreaktor: geteiltes Kühlsystem, Wasser des Primärkreis fließt flüssig unter hohem Druck durch die Brennelemente, Wasser des Sekundärkreis verdampft und treibt eine Turbine an (wird mit Flusswasser gekühlt)

Kernbrennstoff

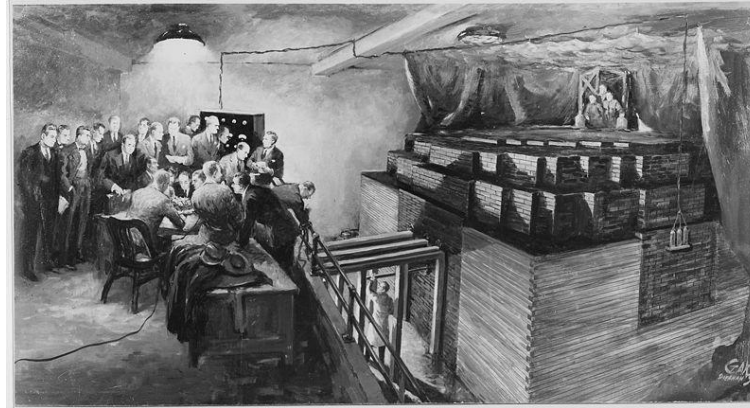
- Pellets mit 1 cm Durchmesser mit angereichertem Uranoxid oder Uran-/Plutoniumoxid-Mischung sind in einem Rohr aus Zirkon eingeschlossen ("Brennstab")
- mehrere (~100) Brennstäbe bilden ein "Brennelement" das von Kühlwasser durchströmt wird
- zwischen den Brennelementen sind bewegliche Steuerstäbe, die Neutronen absorbieren (Bor oder Cadmium)

Andere Reaktortypen

- graphitmoderierter Siedewasser-Reaktor (Beispiel Tschernobyl): Brennelemente zwischen Graphit als Moderator, z.T. verdampfendes Wasser treibt eine Turbine an. Potentielle Probleme: Graphit ist brennbar, verdampfendes Wasser verringert die Absorption thermischer Neutronen (positiver Kühlmittelverlustkoeffizient).
- Brutreaktor (Beispiel SNR-300 Kalkar): Spaltung von ^{238}U durch schnelle Neutronen (kein Moderator), erzeugt ^{239}Pu und ^{235}U . Flüssiges Natrium als Kühlmittel statt Wasser, das die Neutronen zu sehr verlangsamten würde.

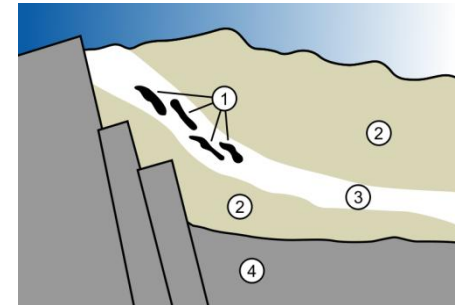


Erster von Menschen gebauter Kernreaktor 1942: The Chicago Pile CP-1
 unter einer Tribüne des ehem. Football-Stadiums Stagg Field der University of Chicago.
 Aufschichtung von Uran und Graphit mit manuell betätigten Cadmium-Steuerstäben.
 Leitung: Enrico Fermi.

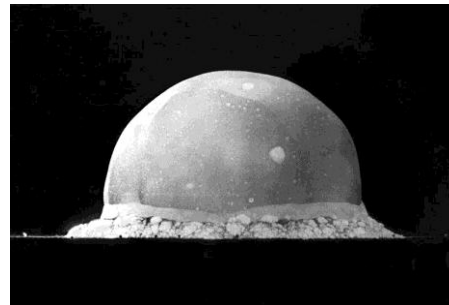


Enrico Fermi
 (1901 - 1954)

Natürlicher Kernreaktor vor ca. 2 Mrd. Jahren: Oklo/Gabun
 aus natürlichem Uranvorkommen mit eingesickertem Wasser als Moderator.
 Vor 2 Mrd. Jahren war der Anteil von ^{235}U in natürlichem Uran wesentlich höher
 als heute, so dass eine Kettenreaktion mit moderierten Neutronen entstehen
 konnte. Der Reaktor war ca. 500.000 Jahre aktiv, mittl. Leistung 100 kW.
 1972 durch die Anomalie der ^{235}U -Konzentration entdeckt: 0.717 statt 0.720%
 (erlaubt Rückschlüsse auf die zeitliche Konstanz von Naturkonstanten)



Erste Kernwaffenexplosion: Alamogordo 1945
"Trinity-Test " im Rahmen des Manhattan-Projekts
 Plutoniumbombe mit 21 kT TNT-Äquivalent
 (1 kT TNT = $4,18 \cdot 10^{12}$ J).



Mitte mit Hut: Robert Oppenheimer
 (1904 - 1967)

5.7 Anwendungen der Kernphysik: Energiegewinnung durch Kernfusion

Freiwerdende Energie bei der Fusion von ^2H und ^3H zu $^4\text{He} + \text{n}$:

3,5 MeV kin. Energie des ^4He

14,1 MeV kin. Energie des Neutrons

17,6 MeV Summe

Pro Masseneinheit des Brennstoffs höherer Energiegewinn, weniger radioaktiver Abfall.

Problematisch ist die hohe Temperatur, die zur Überwindung der Coulomb-Barriere erforderlich ist.

Ansätze:

- Einschluss eines Plasma in eine Anordnung von Magnetfeldern (Tokamak oder Stellarator)
- Trägheitseinschluss in ein Kügelchen, das mit einem Laser- oder Teilchenpuls beschossen wird.

Der Fusionsquerschnitt steigt ab einer kin. Energie von 10 keV an (entspricht 10^8 K Temperatur).

Bei diesen Temperaturen liegt Materie als **Plasma** vor, ein "Gas" aus Ionen und Elektronen. Teilchendichte:

$$d + t \rightarrow ^4\text{He} + \text{n} \quad n_d = n/2 \quad n_t = n/2 \quad n_e = n \quad E_\alpha = \text{nutzbare kinetische Energie der } \alpha\text{-Teilchen}$$

Frei werdende Leistung pro Volumen $\frac{P_A}{V} = E_\alpha \cdot n_d \cdot n_t \cdot \langle \sigma \cdot v \rangle = \frac{n^2}{4} E_\alpha \cdot \langle \sigma \cdot v \rangle$ Wirkungsquerschnitt·Geschwindigkeit = wirksames Volumen / Zeit

Verlustleistung pro Volumen $\frac{P_V}{V} = (n_d + n_t + n_e) \frac{3}{2} kT / \tau_E = 3n \frac{kT}{\tau_E}$ therm. Energie / Einschlusszeit

→ Lawson-Kriterium $P_A > P_V \rightarrow n \cdot \tau_E > \frac{12k \cdot T}{E_\alpha \cdot \langle \sigma \cdot v \rangle}$ sinkt mit der Temperatur, da σ und v mit der Temperatur steigt

"Zündparameter" $n \cdot kT \cdot \tau_E > 10^{21} \frac{\text{keV} \cdot \text{s}}{\text{m}^3}$

Experimente:

- Wendelstein 7-X in Greifswald: Stellarator, Start 2015

- ITER (Internat. Thermonucl. Exp. Reactor) in Cadarache/Frankreich: Tokamak, Start 2027 (?)

- NIF (National Ignition Facility) in Livermore/USA : Laserbasierte Trägheitsfusion, Start um 2010,

Erste Erfolge s. O.A. Hurricane et al. Nature 506 (2014), 343.