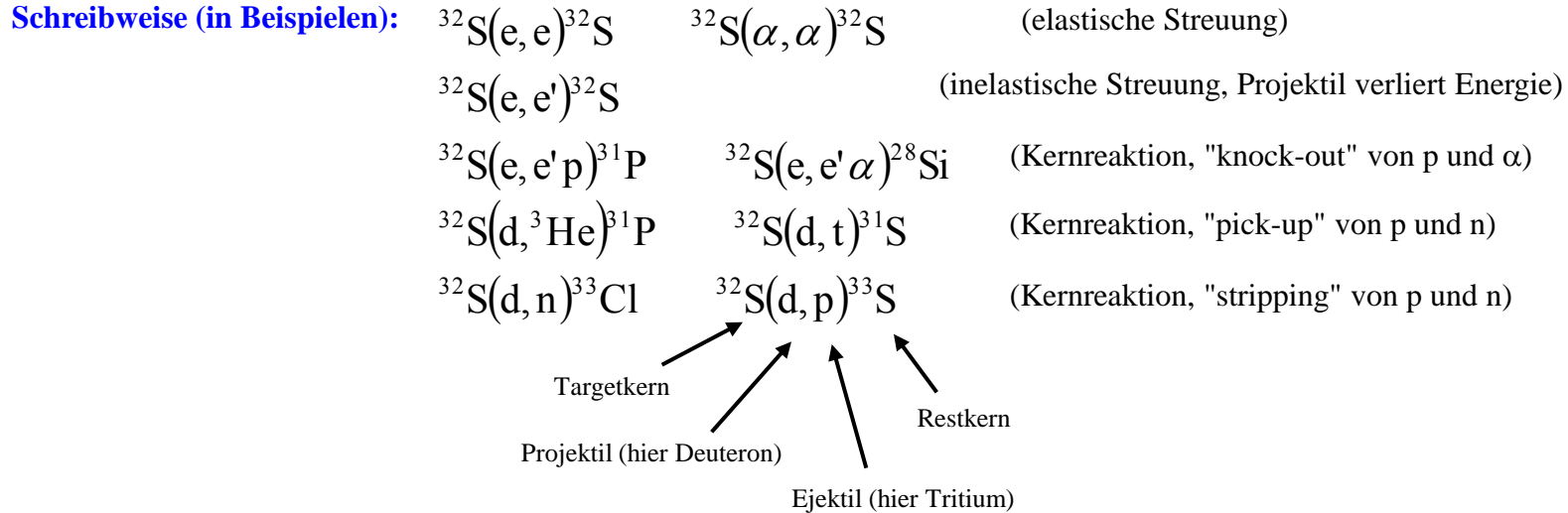


5.2 Streuprozesse

- elastische Streuung
- inelastische Streuung (Kern wird angeregt)
- reaktive Streuung, Kernreaktionen (Kern wird verändert)



Coulomb-Streuung:

Energiesatz mit Abstand δ zwischen Projektil und Targetkern

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{\delta}$$

kleinster Abstand δ_0 mit $v = 0$
 beim zentralen Stoß (Stoßparameter $b = 0$)

$$\frac{1}{2}m \cdot v_0^2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{\delta_0} \rightarrow \delta_0 = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{m \cdot v_0^2}$$

Der Stoßparameter b ist der Abstand zwischen der Bahn des Projektils weit vor dem Stoß und der Achse durch den Targetkern. Es gibt eine eindeutige und einfache Beziehung zwischen b und dem Streuwinkel θ bei der elastischen Streuung an $1/r$ -Potentialen (deren Herleitung aus Physik I, Stöße oder Bewegung im $1/r$ -Potential, bekannt sein könnte):

$$b = \frac{\delta_0}{2} \cot(\theta/2)$$

Herleitung:

Drehimpuls vor dem Stoß = Drehimpuls im Abstand r

$$L = m \cdot v_0 \cdot b = |\vec{r} \times m\vec{v}| = m \cdot r^2 \frac{d\varphi}{dt} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{r^2} = \frac{1}{v_0 \cdot b} \frac{d\varphi}{dt}$$

Ablenkende Kraft in y -Richtung, aus der Zeichnung:

$$F_y = m \cdot \frac{dv_y}{dt} = \frac{a}{r^2} \sin \varphi \quad \text{mit} \quad a \equiv \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0}$$

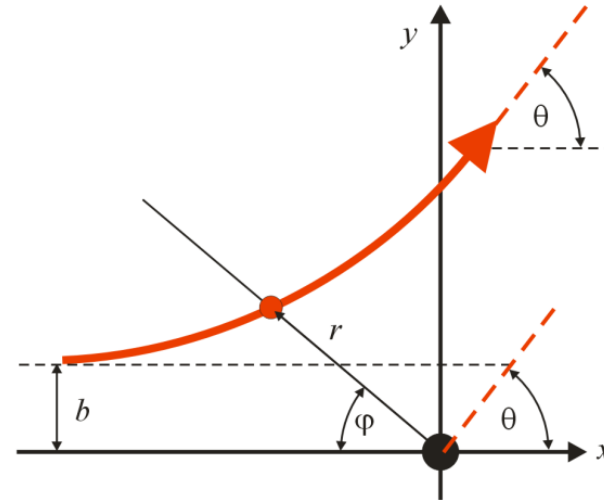
$$\rightarrow \frac{dv_y}{dt} = \frac{a \cdot \sin \varphi}{m \cdot v_0 \cdot b} \frac{d\varphi}{dt}$$

Integriert: $t = -\infty: v_y = 0 \quad \varphi = 0$

$t = +\infty: v_y = v_0 \cdot \sin \theta \quad \varphi = \pi - \theta$

$$\int_0^{v_0 \sin \theta} dv_y = \frac{a}{m \cdot v_0 \cdot b} \int_0^{\pi - \theta} \sin \varphi \cdot d\varphi \quad \rightarrow \quad v_0 \cdot \sin \theta = \frac{a}{m \cdot v_0 \cdot b} \{-\cos(\pi - \theta) + 1\}$$

$$b = \frac{a}{m \cdot v_0^2} \cot(\theta/2) \quad \text{mit} \quad \cot(\theta/2) = (\cos \theta + 1) / \sin \theta$$


Häufigkeit der Streueignisse als Funktion des Winkels:

Je größer der Streuwinkel, desto kleiner der Stoßparameter und desto seltener das Streueignis, hier ausgedrückt durch den differentiellen Wirkungsquerschnitt. Zur folgenden Herleitung wird benötigt:

$$\frac{db}{d\theta} = \frac{a}{m \cdot v_0^2} \cdot \frac{d \cos(\theta/2)}{d\theta \sin(\theta/2)} = \frac{a}{m \cdot v_0^2} \cdot \frac{-1/2 \cdot \sin^2(\theta/2) - 1/2 \cdot \cos^2(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)}$$

$$\left| \frac{db}{d\theta} \right| = \frac{a}{2m \cdot v_0^2} \cdot \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \quad \text{mit} \quad a = \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0} \quad (\text{Coulomb-Streuung})$$

Herleitung der Coulomb-Streufornel

Den Wirkungsquerschnitt σ kann man sich als eine Fläche vorstellen, die jedem Streuzentrum (z.B. Atomkern) zugeordnet ist. Wird diese Fläche von einem Projektil getroffen, findet ein definiertes Streueignis statt.

A = Fläche auf der "Probe"

n = Zahl der Streuzentren in der Probe pro Flächeneinheit

$A \cdot n$ = Zahl der Streuzentren in der Fläche A

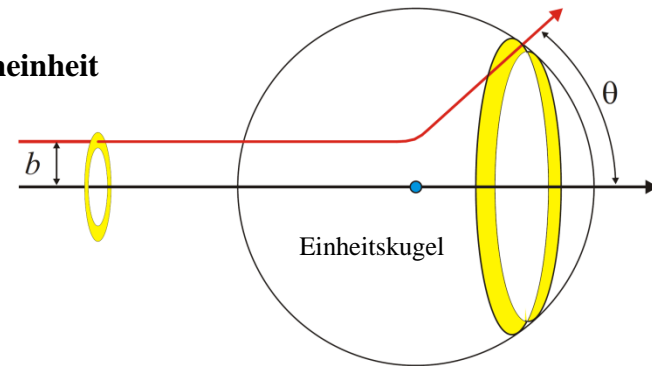
$\sigma \cdot A \cdot n$ = Fläche der Streuzentren in der Fläche A

j = Teilchenstromdichte = Projektile pro Zeiteinheit und Flächeneinheit

$$\frac{\text{Ereignisse}}{dt} = j \cdot n \cdot A \cdot \sigma$$

$$\frac{\text{Ereignisse}/dt}{j \cdot n \cdot A} = \sigma \quad (\text{totaler Wirkungsquerschnitt})$$

$$\frac{\text{Ereignisse}/dt}{j \cdot n \cdot A \cdot d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} \quad (\text{differenzieller Wirkungsquerschnitt})$$



Teilchen mit einem Stoßparameter b werden eindeutig um einen bestimmten Winkel θ abgelenkt. Damit: Fläche des Kreisrings (s. Bild) = Wirkungsquerschnitt für die Streuung in das Winkelintervall θ bis $\theta + d\theta$

$$2\pi \cdot b \cdot db = \frac{d\sigma}{d\Omega} \cdot 2\pi \cdot \sin \theta \cdot d\theta$$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = b \cdot \left| \frac{db}{d\theta} \right| \cdot \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{mit } b \text{ und } db/d\theta \text{ von oben: } \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{a}{m \cdot v_0^2} \cot(\theta/2) \cdot \frac{a}{2m \cdot v_0^2} \cdot \frac{1}{\sin^2(\theta/2)} \cdot \frac{1}{\sin \theta}$$

$$\sin \theta = 2 \cdot \sin(\theta/2) \cdot \cos(\theta/2)$$

und $a = \frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0} \rightarrow$

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot m \cdot v_0^2} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sin^4(\theta/2)}$$

Coulomb-Streufornel

Beispiel: Rutherford'sche Streuversuche

$$p = \hbar k = \frac{h}{\lambda} \quad \lambda = \frac{h}{p}$$

Energie der α -Teilchen ~ 5 MeV

→ De-Broglie-Wellenlänge

$$1) \lambda = \frac{h}{\sqrt{2m \cdot E_{kin}}} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}}{\sqrt{8 \cdot 1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg} \cdot 5 \cdot 10^6 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}^2}} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}}{10,3 \cdot 10^{-20} \text{ kg} \cdot \text{m}/\text{s}} = 6 \text{ fm}$$

$$2) \lambda = \frac{2\pi \cdot \hbar \cdot c}{\sqrt{2mc^2 \cdot E_{kin}}} = \frac{2\pi \cdot 197,3 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{\sqrt{8 \cdot 938 \text{ MeV} \cdot 5 \text{ MeV}}} = \frac{1240 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{194 \text{ MeV}} = 6 \text{ fm}$$

Diese Wellenlänge ist zu groß, um die Dichteverteilung des Kerns zu vermessen. Bei kleinerem λ zeigt die Winkelverteilung ein Beugungsmuster (Minima und Maxima), das von der Dichteverteilung abhängt.

Außerdem ist zu bedenken:

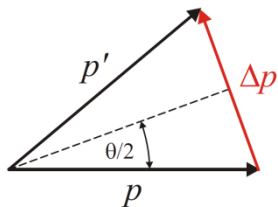
- auf α -Teilchen wirken sowohl die Coulombkraft als auch die Kernkräfte,
- Elektronen als Projektile sind nur auf die Coulombkraft, d.h. auf die Ladungsverteilung empfindlich,
- die reine Massenverteilung könnte mit hochenergetischen Neutronen bestimmt werden.

Die Ladungsverteilung wurde mit hochenergetischen Elektronen eingehend untersucht (R. Hofstadter um 1960).

Die Ergebnisse werden oft als Funktion des Impulsübertrags statt des Streuwinkels ausgedrückt:

$$\Delta \vec{p} = \vec{p} - \vec{p}' \quad \text{wenn } |\vec{p}| = |\vec{p}'| \text{ (elastisch):}$$

$$\sin(\theta/2) = \frac{\Delta p}{2p} = \frac{\Delta p}{2m \cdot v_0} \quad \rightarrow \quad \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Coul} = 4 \cdot \left(\frac{Z_1 \cdot Z_2 \cdot e^2 \cdot m}{4\pi \cdot \epsilon_0} \right)^2 \cdot \frac{1}{\Delta p^4}$$

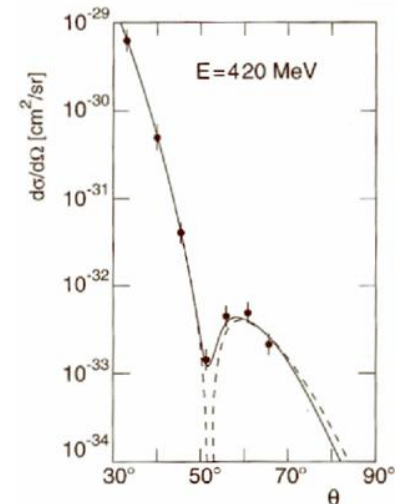


für eine ausgedehnte Ladungsverteilung:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \left(\frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{Coul} \cdot \left| \int \rho(\vec{r}) \cdot e^{i \frac{\Delta \vec{p}}{\hbar} \cdot \vec{r}} d\vec{r} \right|^2$$

Formfaktor

Quadrat der Fourier-Transformierten der Ladungsverteilung



5.3 Radioaktivität

Entdeckung (Schwärzung von Fotoplatten)

- 1896 Uran (A.-H. Becquerel)
- 1898 Thorium, Radium, Polonium (M. & P. Curie)
- 1898 α - und β -Strahlung (E. Rutherford)
- 1900 γ -Strahlung (P. Villard)



Antoine-Henri Becquerel (1852 - 1908)



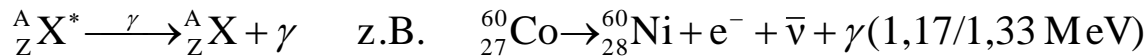
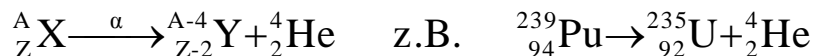
Marie Curie (1867 - 1934)



Pierre Curie (1859 - 1906)

Zerfallsarten

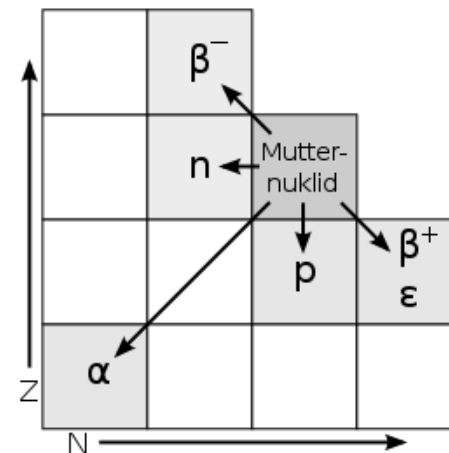
- Alpha-Zerfall: Emission von α -Teilchen (${}^4\text{He}$)
- Beta-Zerfall: Emission von Elektronen/Positronen + (Anti-)Neutrino
- Gamma-Strahlung: elektromagnetische Strahlung beim α - und β -Zerfall



Nuklidkarte

Darstellung aller Nuklide als Funktion von N und Z . Stabile Kerne folgen ungefähr einer Linie

$$Z = \frac{A}{1,98 + 0,0155 \cdot A^{2/3}}$$

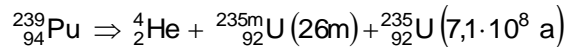


(Wikipedia, Cepheiden)

Experimente

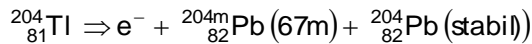
Drei radioaktive Präparate werden betrachtet. Ein Geiger-Müller-Zählrohr registriert einfallende geladene Teilchen sowie Gammaquanten. Die Messereignisse werden in ein akustisches Signal umgewandelt und können gezählt werden (der elektronische Zähler wurde hier nicht verwendet).

1) Alpha-Strahler (Plutonium-239)



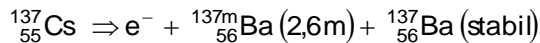
Die Zählrate nimmt unterhalb eines Abstand von ca. 1,5 cm vom Zählrohr rapide zu. Die Strahlung kann bereits durch ein dünnes Stück Papier vollständig abgeschirmt werden.

2) Beta-Strahler (Thallium-204)



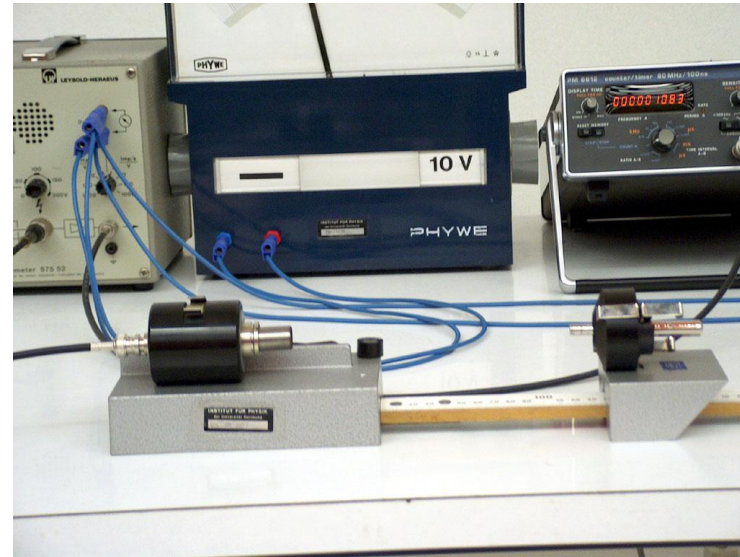
Die Zählrate nimmt über einen Abstand von ca. 0,5 m vom Zählrohr exponentiell ab. Dicke Pappe verringert die Zählrate, ein Aluminiumblech (ca. 1 mm) schirmt die Strahlung vollständig ab.

3) Gamma-Strahler (Barium-137 nach Zerfall von Cäsium-137)



Die Zählrate nimmt mit dem Abstand ab. Bleiplatten mit einer Gesamtdicke von ca. 2 cm sind erforderlich, um die Strahlung abzuschirmen. Dies legt nahe, dass die dünne Fassung des Präparats die Strahlung nicht gut abschirmt und die Abnahme der Zählrate dem Abstandquadratgesetz (Abnahme $\sim 1/r^2$ für isotrope Abstrahlung) folgt, während α - und β -Teilchen von der Luft absorbiert werden.

Auch ohne radioaktives Präparat wird ein Untergrund an Strahlung registriert (ca., 1 "Klick" in 10 Sekunden).



Zerfallsgesetze

Ein Kern kann mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit λ pro Zeiteinheit spontan zerfallen, wenn dies energetisch möglich ist. Der Zeitpunkt des Zerfalls ist nicht vorhersagbar. Für ein Ensemble von N Kernen:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N \quad \rightarrow \quad \int_{N_0}^{N(t)} \frac{1}{N} dN = -\lambda \int_0^t dt \quad \text{Exponentielles Zerfallsgesetz mit Zerfallskonstante } \lambda$$

$$\ln \frac{N(t)}{N_0} = -\lambda \cdot t$$

$$N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t} = N_0 \cdot e^{-t/\tau}$$

$$t_{1/2} = \ln 2 \cdot \tau \approx 0.69 \cdot \tau$$

Halbwertszeit

Aktivität $A(t) = -\frac{dN}{dt}$ (positive Zahl)

Zerfall eines Kerns mit Konstante λ_1 und des Tochterkerns mit λ_2 :

Ratengleichungen: $\frac{dN_1}{dt} = -\lambda_1 \cdot N_1$ $\frac{dN_2}{dt} = \lambda_1 \cdot N_1 - \lambda_2 \cdot N_2$ $\frac{dN_3}{dt} = \lambda_2 \cdot N_2$

2. Gl. mit $\exp(\lambda_2 t)$ erweitert: $\frac{dN_2}{dt} \cdot e^{\lambda_2 t} + \lambda_2 \cdot N_2 \cdot e^{\lambda_2 t} = \lambda_1 \cdot N_1 \cdot e^{\lambda_2 t} = \lambda_1 \cdot N_1(0) \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$ Zerfallsgesetz für N_1

$$\frac{d}{dt} (N_2 \cdot e^{\lambda_2 t}) = \lambda_1 \cdot N_1(0) \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t}$$

integriert: $N_2 \cdot e^{\lambda_2 t} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot N_1(0) \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} + C = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot N_1(0) \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} - \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot N_1(0)$

$$N_2(t) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \cdot N_1(0) \cdot (e^{-\lambda_1 t} - e^{-\lambda_2 t})$$

wegen $N_2(0) = 0$