

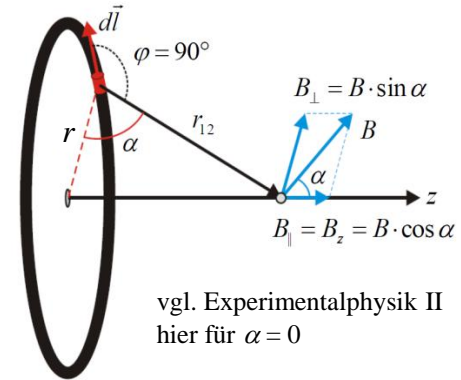
### Spin-Bahn-Kopplung

Betrachte im Ruhesystem des Elektrons das Magnetfeld aufgrund des Atomkerns, der aus der Sicht des Elektrons einen Kreisstrom erzeugt. Magnetfeld im Kreismittelpunkt (Herleitung mit Biot-Savart-Gesetz):

$$B = \frac{\mu_0 \cdot I}{2r} \quad \text{mit} \quad I = Z \cdot e \frac{v}{2\pi \cdot r} \quad \text{und} \quad v = \frac{|\vec{l}|}{m_e \cdot r}$$

$$B = \frac{\mu_0 \cdot Z \cdot e \cdot |\vec{l}|}{2r \cdot 2\pi \cdot r \cdot m_e \cdot r} \quad \mu_0 \cdot \epsilon_0 = 1/c^2$$

$$\vec{B} = \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{Z \cdot e}{m_e \cdot c^2 \cdot r^3} \cdot \vec{l}$$



vgl. Experimentalphysik II hier für  $\alpha = 0$

Hier steht die Elektronen- und nicht die Kernmasse, da es immer noch der Drehimpuls des Elektrons ist.

Die Energiedifferenz zwischen den beiden Spin-Einstellungen ( $\pm \hbar/2$ ) relativ zum Magnetfeld ist

$$\Delta E = \vec{\mu}_s \cdot \vec{B} = g_s \frac{\mu_B}{\hbar} \cdot \vec{s} \cdot \frac{1}{4\pi \cdot \epsilon_0} \frac{Z \cdot e}{m_e \cdot c^2 \cdot r^3} \cdot \vec{l} \approx \frac{Z \cdot e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot m_e^2 \cdot c^2 \cdot r^3} \cdot \vec{s} \cdot \vec{l} \quad \text{mit} \quad \mu_B = \frac{e \cdot \hbar}{2m_e}; \quad g_s \approx 2$$

Diese Betrachtung leidet darunter, dass das Ruhesystem des Elektrons kein Inertialsystem ist, aber das kann bei der Transformation in das Ruhesystem des Kerns durch einen weiteren **Faktor 1/2** in Ordnung gebracht werden (der sogenannte **Thomas-Faktor**, benannt nach Llewellyn Thomas, 1903-1992). Anmerkung: Man könnte auch direkt im Ruhesystem des Kerns die Wechselwirkung der elektrischen Dipolmomente von Kern und Elektronenbahn (ein bewegter magnetischer Dipol erzeugt einen elektrischen Dipol) betrachten, aber das wäre noch komplizierter. Mit dem Thomas-Faktor gilt

$$E_{nls} = E_n + \frac{Z \cdot e^2}{8\pi \cdot \epsilon_0 \cdot m_e^2 \cdot c^2 \cdot r^3} \cdot \vec{s} \cdot \vec{l}$$

wobei für  $1/r^3$  und  $(s \cdot l)$  die entsprechenden Erwartungswerte eingesetzt werden müssen, die nicht ganz offensichtlich sind. Da  $s$  und  $l$  bei Anwesenheit der Spin-Bahn-Kopplung keine "guten" Quantenzahlen mehr sind, wird der Gesamtdrehimpuls  $j$  mit den üblichen Eigenschaften für Drehimpulse eingeführt:

$$\vec{j} = \vec{l} + \vec{s} \quad |\vec{j}| = \sqrt{j \cdot (j+1)} \cdot \hbar \quad \vec{j}^2 = \vec{l}^2 + 2 \cdot \vec{s} \cdot \vec{l} + \vec{s}^2 \quad \rightarrow \quad \vec{s} \cdot \vec{l} = \frac{1}{2} (\vec{j}^2 - \vec{l}^2 - \vec{s}^2)$$

**Erwartungswerte**  $\langle \vec{s} \cdot \vec{l} \rangle = \frac{\hbar^2}{2} \left( j \cdot (j+1) - l \cdot (l+1) - \underbrace{\frac{3}{4}}_{s \cdot (s+1)} \right)$

die Quadrate von  $j$ ,  $l$  und  $s$  sind weiterhin "gute" Quantenzahlen

$$\langle 1/r^3 \rangle = \left( \underbrace{\frac{m_e \cdot e^2}{4\pi \cdot \epsilon_0 \cdot \hbar^2}}_{1/a_0} \cdot \frac{Z}{n} \right)^3 \frac{1}{l \cdot (l+1/2) \cdot (l+1)}$$

$a_0$  ist der Bohrsche Radius

↑ anders als im Bohrschen Atommodell

**eingesetzt**  $E_{nls} = E_n - E_n \cdot \frac{Z^2 \alpha^2}{2n} \cdot \frac{j \cdot (j+1) - l \cdot (l+1) - 3/4}{l \cdot (l+1/2) \cdot (l+1)}$

hier wurde der Vorfaktor durch die Verwendung der Feinstrukturkonstante  $\alpha$  sowie der Energie  $E_n$  (daher auch das Minuszeichen) vereinfacht:

$$E_n = -\frac{e^4 m_e}{32\pi^2 \epsilon_0^2 \hbar^2} \cdot \frac{Z^2}{n^2} \quad \alpha = \frac{e^2}{4\pi \epsilon_0 \hbar c}$$

**Die Quantenzahl für den Gesamtdrehimpuls kann zwei Werte annehmen:**

$$j = l + 1/2 \quad \text{oder} \quad j = l - 1/2$$

**Wenn man den Darwin-Term addiert, ergibt sich nach einigen Umformungen (prima Übungsaufgabe):**

$$E_{nls} = E_n \cdot \left\{ 1 - \frac{Z^2 \cdot \alpha^2}{n} \left( \frac{1}{j+1/2} - \frac{3}{4n} \right) \right\}$$

**Dieses überraschend einfache Ergebnis deutet darauf hin, dass beide Terme irgendwie "verwandt" sind. In der Tat ist nicht nur der Darwin-Term, sondern auch die Spin-Bahn-Kopplung ein relativistischer Effekt (Magnetismus kann ja als relativistischer Effekt bewegter Ladungen gedeutet werden). Allerdings ist diese Formel nur eine (gute) Näherung im Rahmen der "Störungstheorie". Man erhält sie unter der Annahme, dass sich die Energieverschiebung aus der Anwendung eines "Störoperators" auf die ungestörte Wellenfunktion ergibt.**

$$E_n^{(0)} + \delta E_n^{(1)} = \langle \psi_n^{(0)} | \hat{H}^{(0)} + \hat{H}^{(1)} | \psi_n^{(0)} \rangle$$

**Bemerkenswert ist auch, dass die Energie der Zustände nicht vom Bahndrehimpuls  $l$  und/oder vom Spin  $s$ , sondern nur vom Gesamtdrehimpuls  $j$  abhängt. Weitere kleine Effekte (Lamb-Shift und Hyperfeinstruktur) heben diese Entartung auf.**

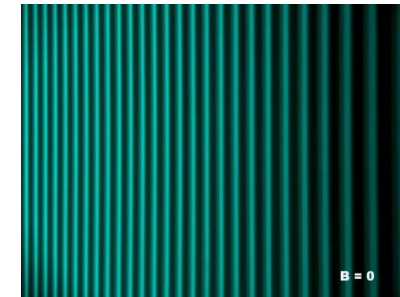
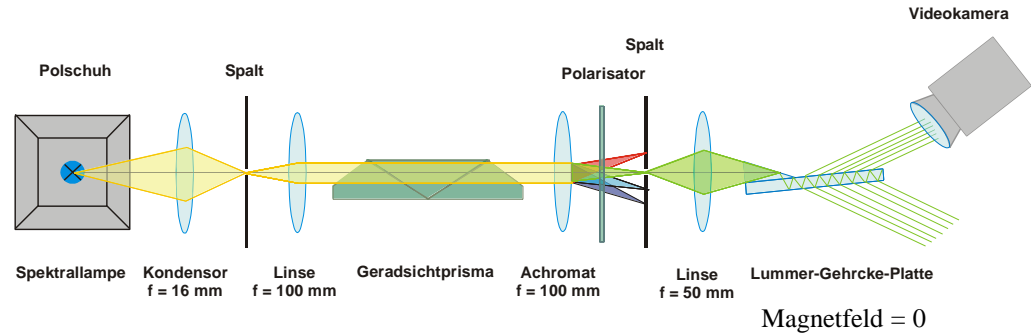
**Experimenteller Nachtrag:  
Der normale Zeeman-Effekt**

Eine Cadmiumdampf Lampe befindet sich zwischen den Polen eines Magneten.

Das Licht wird auf einen Spalt fokussiert und wird anschließend in einem Geradsichtprisma nach Wellenlängen aufgefächert und in die Ebene eines zweiten Spalts fokussiert, der nur die grüne Cadmiumlinie bei 508,6 nm passieren lässt.

In der Lummer-Gehrcke-Platte wird das Licht mehrfach an den beiden Oberflächen reflektiert. Konstruktive Interferenz entsteht, wenn der Wegunterschied von Licht benachbarter Punkte an den Oberflächen ein ganzzahliges Vielfaches der Wellenlänge ist. Da die bei bestimmten Winkeln der Fall ist, sind die Teilstrahlen parallel. Man muss also den Fokus der nachfolgenden CCD-Kamera auf unendlich einstellen und sieht aufeinanderfolgenden Ordnungen der Interferenz als Streifenmuster. Jeder Streifen ist ein spektrales Abbild der Cadmiumlinie.

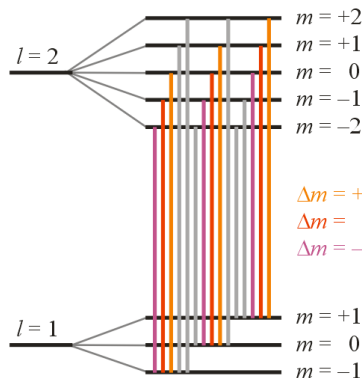
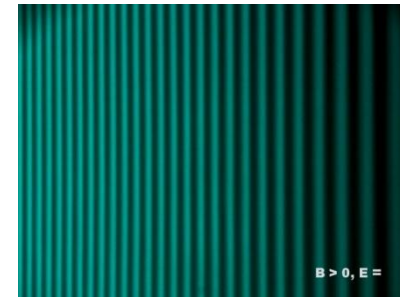
Mit Magnetfeld erscheinen die Linien verbreitert, da sie sich in drei überlappende Linien aufspalten. Mit einem Polarisationsfilter im Strahlengang erscheinen die Linien entweder wieder schmal (linear polarisierte Linie mit  $\Delta m = 0$ ) oder verdoppelt (zirkular polarisierte Linien mit  $\Delta m = \pm 1$ ), je nach Orientierung des drehbaren Filters.



Magnetfeld  $\neq 0$ , Polarisator  $0^\circ$



Magnetfeld  $\neq 0$ , Polarisator  $90^\circ$



Die grau gezeichneten Übergänge sind verboten, die lila, rot und orange dargestellten Übergänge haben untereinander die gleiche Energiedifferenz und erscheinen als eine Linie im Spektrum. Man sieht also insgesamt drei Linien.

### b) Die Lamb-Verschiebung (Lamb-Shift)

Die Elektronen im Atom werden von "Vakuumfluktuationen" beeinflusst, d.h. Teilchen-Antiteilchen-Paare, die nach der Quantenfeldtheorie ständig für kurze Zeit entstehen. Dies bewirkt eine kleine Verschiebung der Energieniveaus, die durch eine Korrektur des Coulomb-Potentials beschrieben wird. Die Lamb-Verschiebung ist

$$\Delta E_{Lamb} = \alpha^5 \cdot m_e \cdot c^2 \cdot f(n, l, j)$$

wobei  $\alpha$  wieder die Feinstruktur-Konstante und  $f$  eine Funktion von  $n, l$  und (für  $l > 0$ ) von  $j$  in der Größenordnung von  $10^{-2}$  ist.

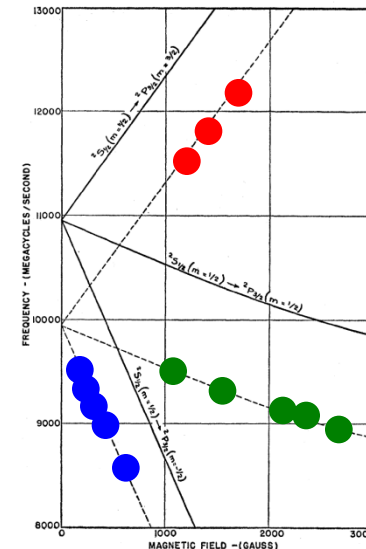
Wie misst man so kleine Verschiebungen, die im Bereich von  $10^{-6}$  eV liegen? Die Übergänge zwischen den Zuständen  $2s_{1/2}$  und  $2p_{1/2}$ , die gemäß der Feinstruktur entartet sein sollten, erfordern Photonen mit Frequenzen im GHz-Bereich (Mikrowellen). Im Experiment von Lamb/Retherford 1947 wurden H-Atome aus einem Ofen durch Stöße mit Elektronen in den langlebigen  $2s_{1/2}$ -Zustand angeregt (Lebensdauer  $\sim 1$  s). Beim Auftreffen auf ein Wolframblech bewirkten diese Atome durch Abgabe ihrer Anregungsenergie einen Strom. Dies ist aber nicht der Fall, wenn die Atome vorher mit abstimmbaren Mikrowellen in den kurzlebigen  $2p_{3/2}$ -Zustand überführt wurden (dessen Niveaus durch ein Magnetfeld zusätzlich aufgespalten sein können). Aus der Mikrowellenfrequenz  $\nu$ , die das Stromsignal minimiert, ergibt sich die Energiedifferenz zwischen den Zuständen gemäß  $E = h \cdot \nu$ . Das Bild zeigt die gemessenen Frequenzen für Übergänge in den aufgespaltenen  $2p_{3/2}$ -Zustand als Funktion des Magnetfelds. Der Frequenzunterschied aufgrund der Lamb-Verschiebung beträgt ca. 1 GHz.

Anmerkung: Bezeichnung atomarer Zustände:  $n$  Drehimpuls  $j$  z.B.  $2s_{1/2}$



Willis E. Lamb Jr.  
(1913 - 2008)

- $2s_{1/2} \rightarrow 2p_{3/2}(m_j = 3/2)$
- $2s_{1/2} \rightarrow 2p_{3/2}(m_j = 1/2)$
- $2s_{1/2} \rightarrow 2p_{3/2}(m_j = -1/2)$



## c) Die Hyperfeinstruktur

Atomkerne sind ausgedehnte Objekte und können auch einen **Drehimpuls  $I$**  haben, dessen Einfluss bisher nicht berücksichtigt wurde. Mit den üblichen Eigenschaften:

$$|\vec{I}| = \sqrt{I \cdot (I+1)} \cdot \hbar \quad \text{mit} \quad I_z = m_I \cdot \hbar \quad \text{wobei} \quad -I \leq m_I \leq I$$

Als handliche Einheit für das nukleare magnetische Moment wird das **Kernmagneton** definiert, das sich vom Bohrschen Magneton nur durch die Protonen- statt der Elektronenmasse unterscheidet (Index  $N$  für Nucleus):

$$\mu_N = \frac{e \cdot \hbar}{2m_p} = 5,05 \cdot 10^{-27} \frac{\text{J}}{\text{T}} = 3,15 \cdot 10^{-8} \frac{\text{eV}}{\text{T}}$$

Das magnetische Moment eines Kerns mit Drehimpuls  $I$  und dem entsprechenden gyromagnetischen Verhältnis ist

$$|\vec{\mu}_I| = \gamma_I \cdot |\vec{I}| = \frac{g_I \cdot \mu_N}{\hbar} \cdot |\vec{I}| = g_I \cdot \mu_N \cdot I \quad \text{z.B. für ein Proton} \quad |\vec{\mu}_p| = \underbrace{5,58}_{g_I} \cdot \mu_N \cdot \frac{1}{2} = 2,79 \cdot \mu_N$$

Im Magnetfeld, das von einem Elektron mit Gesamtdrehimpuls  $j$  am Ort des Kerns erzeugt wird, ergibt sich für das magnetische Moment des Kerns eine potentielle Energie, die von der relativen Orientierung abhängt:

$$E_{I,j} = -\vec{\mu}_I \cdot \vec{B}_j \quad \text{Der Winkel zwischen den beiden Vektoren ist} \quad \frac{\vec{\mu}_I \cdot \vec{B}_j}{|\vec{\mu}_I| \cdot |\vec{B}_j|} = \frac{\vec{I} \cdot \vec{j}}{|\vec{I}| \cdot |\vec{j}|}$$

Mit dem **Gesamtdrehimpuls  $F$  von Elektron und Kern**

$$\vec{F} = \vec{j} + \vec{I}; \quad \vec{I} \cdot \vec{j} = \frac{1}{2} (\vec{F}^2 - \vec{j}^2 - \vec{I}^2) \quad \rightarrow \quad \frac{\vec{I} \cdot \vec{j}}{|\vec{I}| \cdot |\vec{j}|} = \frac{1}{2} \frac{F \cdot (F+1) - j \cdot (j+1) - I \cdot (I+1)}{\sqrt{I \cdot (I+1)} \cdot j \cdot (j+1)}$$

Damit ist die sog. **Hyperfeinstrukturenergie**

$$\Delta E_{HFS} = \vec{\mu}_I \cdot \vec{B}_j = \frac{\vec{\mu}_I \cdot \vec{B}_j}{|\vec{\mu}_I| \cdot |\vec{B}_j|} \cdot \frac{g_I \cdot \mu_N}{\hbar} \cdot |\vec{I}| \cdot B_j = \frac{\vec{I} \cdot \vec{j}}{|\vec{j}|} \cdot \frac{g_I \cdot \mu_N}{\hbar} B_j \quad (\text{mit } |\vec{\mu}_I| \cdot |\vec{B}_j| \text{ erweitert und } |\vec{\mu}_I| \text{ eingesetzt})$$

$$\Delta E_{HFS} = \frac{1}{2} \cdot \frac{g_I \cdot \mu_N \cdot B_j}{\sqrt{j \cdot (j+1)}} \cdot \{F \cdot (F+1) - j \cdot (j+1) - I \cdot (I+1)\} = \frac{A}{2} \cdot \{F \cdot (F+1) - j \cdot (j+1) - I \cdot (I+1)\}$$

sog. Hyperfeinstruktur-Konstante  $A$

$$\Delta E_{HFS} = \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\frac{g_I \cdot \mu_N \cdot B_j}{\sqrt{j \cdot (j+1)}}}_A \cdot \{F \cdot (F+1) - j \cdot (j+1) - I \cdot (I+1)\} = \frac{A}{2} \cdot \{F \cdot (F+1) - j \cdot (j+1) - I \cdot (I+1)\}$$

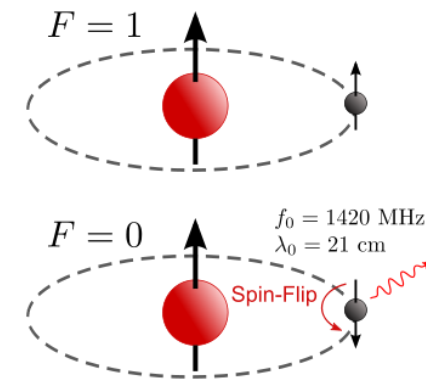
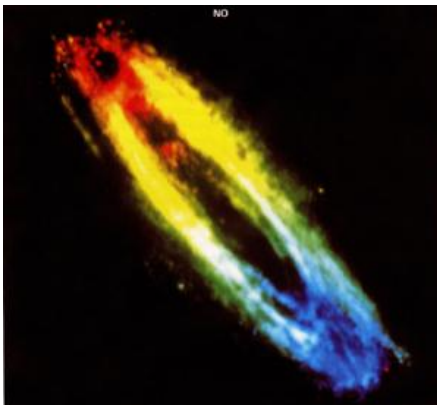
Für den Grundzustand von Wasserstoff gilt:  $n=1$   $l=0$   $j=1/2$   $I=1/2$   $F=0, 1$   
 $g_I = 5,58$

$$\Delta E_{HFS}(F=0) = -\frac{3}{4} A$$

$$\Delta E_{HFS}(F=1) = +\frac{1}{4} A \quad \text{mit} \quad A = \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot 5,58 \cdot \mu_N \cdot B_{1/2}$$

$$A \approx 6 \cdot 10^{-6} \text{ eV} \quad \rightarrow \quad \nu \approx 1,4 \text{ GHz} \quad \lambda \approx 21 \text{ cm}$$

Der Übergang zwischen  $F=0$  und  $F=1$  im Zustand  $1s_{1/2}$  hat eine Wellenlänge von ca. 21 cm. Diese Linie im Wasserstoffspektrum wird auch H-I-Linie genannt und spielt in der Radioastronomie eine große Rolle, weil sich mit ihrer Beobachtung die Verteilung des Wasserstoff ermitteln lässt.



Verteilung der 21-cm-Intensität der Andromeda-Galaxie M31, farbcodiert ist hier die Dopplerverschiebung der Linie (blau = Geschwindigkeit von uns weg, rot = Geschwindigkeit auf uns zu, nach Abzug der mittleren Geschwindigkeit von ca. 300 km/s, mit der sich M31 uns nähert)