

Übergang von kartesischen Koordinaten zu Kugelkoordinaten

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\theta = \cos^{-1}(z / \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}) \quad \leftrightarrow$$

$$\varphi = \tan^{-1}(y / x)$$

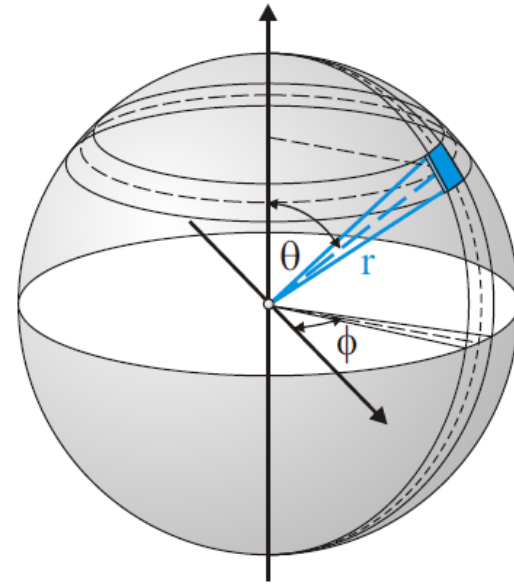
$$x = r \cdot \sin \theta \cdot \cos \varphi$$

$$y = r \cdot \sin \theta \cdot \sin \varphi$$

$$z = r \cdot \cos \theta$$

Laplace-Operator in Kugelkoordinaten

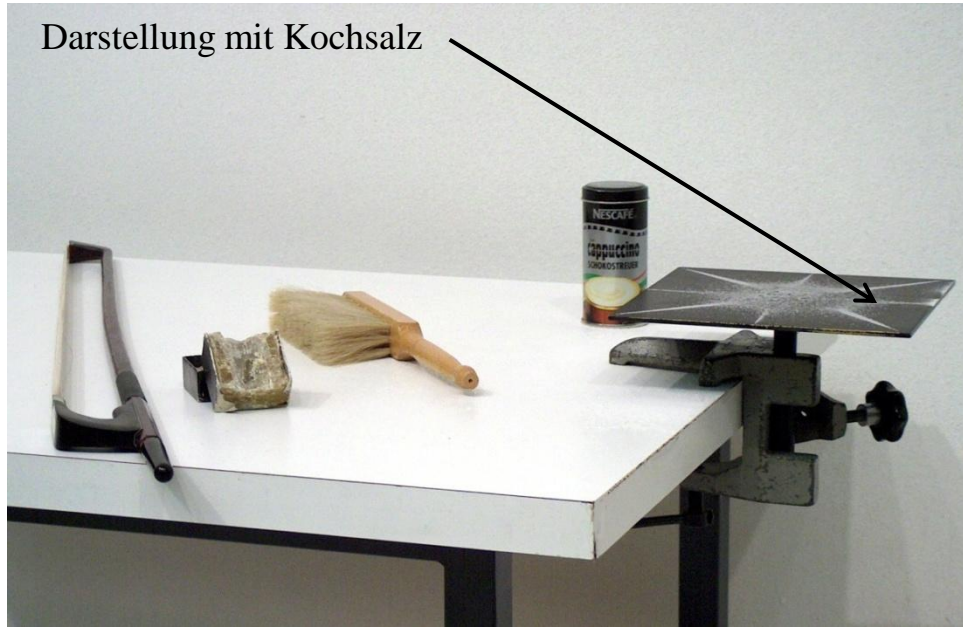
$$\Delta = \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \cdot \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}$$



(Wasserstoffatom → nächstes Skript)

Experiment: Chladnische Klangfiguren

Darstellung mit Kochsalz



Quadratische geschwärzte Messingplatte Kantenlänge 17,5 cm,
mittig eingespannt. Randbedingung: Mitte bleibt ortsfest.
Ränder nicht ortsfest, offene Randbedingung
Anregung mit Bass-Bogen

Frequenzabschätzung 0. Ordnung:

Abmessung ~ halbe Wellenlänge = 0.2 m

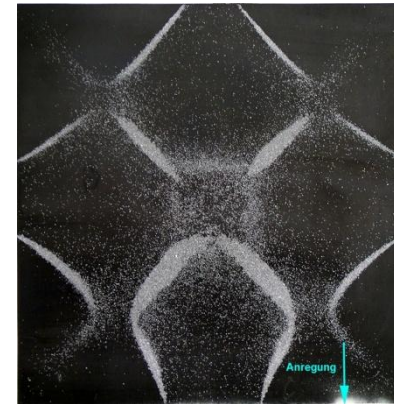
Schallgeschwindigkeit $c \sim 1000 \text{ m/s}$

Frequenz: $f = c / \lambda = 2500 \text{ Hz}$

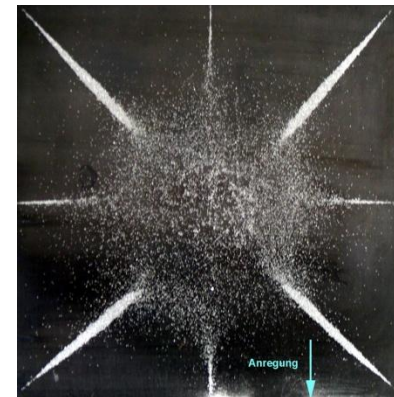
Grundmode



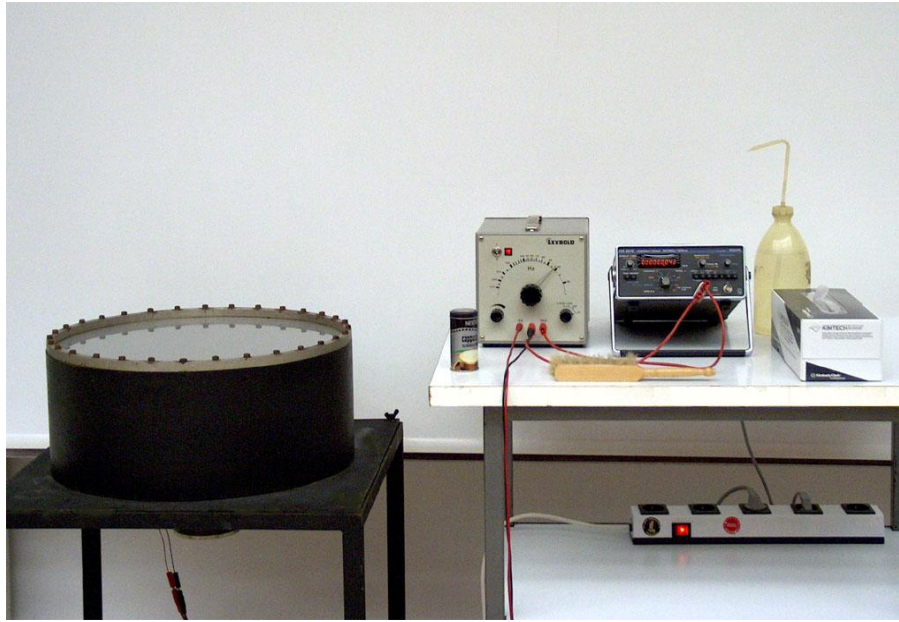
1. Obermode



weitere Obermode



Experiment: Membranschwingung / kreisförmige Trommel



Anregung durch Lautsprecher unter der Membran. In Resonanz entstehen die Membranschwingungen. Die Art der Anregung (Lage des Lautsprechers bezüglich der Membran) ist für die Entstehung bestimmter Moden entscheidend. Randbedingung: Membran ist am Rand eingespannt.

$$u_{n,m}(r, \varphi) \propto J_n(k_{nm}r) \cdot \cos(n\varphi)$$

Die **Besselfunktionen** bestimmen die Radialabhängigkeit. Die Ordnung der Besselfunktion wird durch die Winkelabhängigkeit festgelegt (Parameter). Bei fest eingespannten Rändern (Randbedingung) bestimmen die Nullstellen der Besselfunktion die radiale Wellenzahl k_{nm} .

