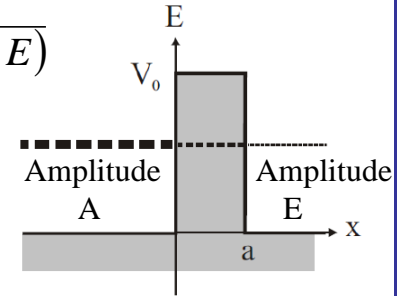


## Tunneleffekt (Wiederholung)

Transmission einer exponentiell abfallenden Wellenfunktion mit Energie  $E$  durch eine Potenzialbarriere  $V_0$

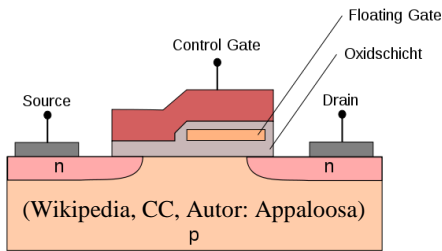
Transmissionswahrscheinlichkeit 
$$T = \frac{|E|^2}{|A|^2} \propto e^{-2\alpha \cdot a} \quad \text{mit} \quad \alpha = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m \cdot (V_0 - E)}$$



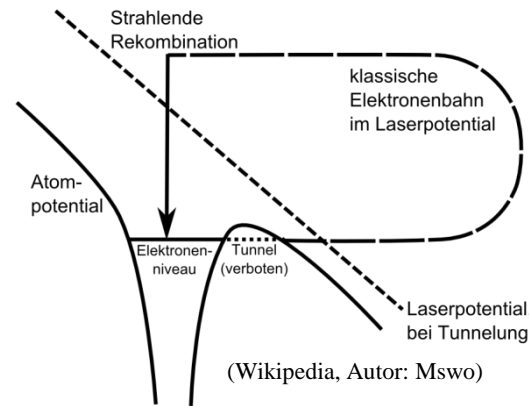
## Beispiele für Anwendungen

- Rastertunnelmikroskop (RTM, STM), Elektronen "tunneln" zwischen einer Oberfläche und einer spitzen Sonde, die mit Piezokristallen über die Oberfläche bewegt wird
- Erzeugung hoher Harmonischer von Laserpulsen in einem Gas

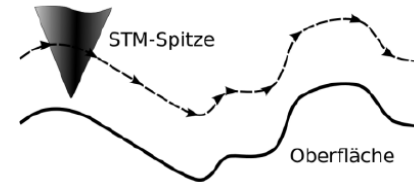
### - FLASH-Datenspeicher



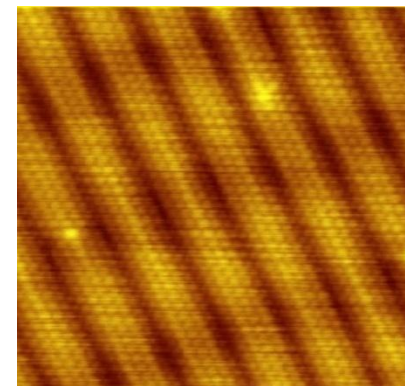
Ladung kann durch Tunneln auf das "floating gate" gebracht werden oder davon abfließen. Wenn die Tunnelbarriere nicht durch eine Spannung am "contol gate" herabgesetzt wird, bleibt die Ladung erhalten. Vorteil: der Datenspeicher behält seine Information auch im stromlosen Zustand.



"Halbklassisches" Modell zur Erzeugung hoher Harmonischer von Laserpulsen. Die Aussendung eines Elektrons im hohen elektrischen Feld des Laserpulses wird durch den Tunneleffekt quantenmechanisch beschrieben, die Elektronenbahn wird klassisch berechnet. Die Harmonischen entstehen durch die periodische Abfolge der strahlenden Rekombinationsereignisse ( $2x$  pro Laserperiode).

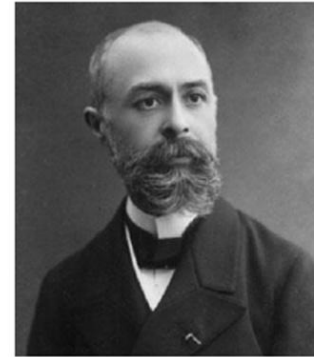


Raster("scanning")-Tunnelmikroskop: Die Spitze kann sich entweder in konstanter Höhe befinden (Variation des Tunnelstroms) oder - wie hier gezeigt - bei konstantem Tunnelstrom der Oberfläche folgen (Variation der Höhenregelung).



Oberfläche eines Gold-Einkristalls

## Der Alpha-Zerfall von Atomkernen



Antoine-Henry Becquerel  
(1852-1908)



George Gamow  
(1904-1968)

1896 entdeckt Becquerel, dass Uransalze Fotoplatten schwärzen

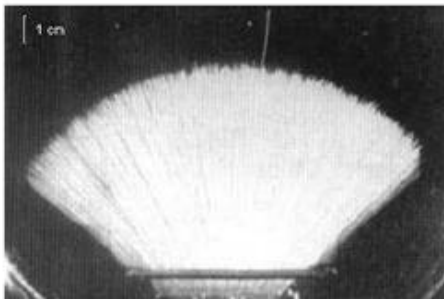
1908 weist Rutherford Helium spektroskopisch nach

1928 erklärt Gamov den Alpha-Zerfall durch den Tunneleffekt

Helium-Kerne ("Alpha-Teilchen") werden von einigen Elementen (z.B. Uran oder Radium) mit einer Energie von einigen MeV emittiert. Die Reichweite in Luft ist für alle Alpha-Teilchen gleich, d.h. sie sind monoenergetisch. Je höher die Energie, desto kürzer ist die Halbwertszeit des radioaktiven Isotops.

Zwei Protonen und zwei Neutronen sind besonders fest gebunden und bilden quasi ein "Teilchen" innerhalb des Atomkerns. Die kurzreichweitige starke Wechselwirkung im Atomkern wird gut durch ein Kastenpotenzial beschrieben. Innerhalb des Kerns sind Nukleonen weitgehend kräftefrei (die Ableitung des Potenzials ist null). Bei einem bestimmten Radius ist die attraktive Kraft sehr groß, bei größerer Entfernung nimmt sie rasch ab. Für geladene Kernbestandteile wie Protonen oder Alpha-Teilchen wirkt zusätzlich das abstoßende Coulomb-Potenzial. Kasten- und Coulomb-Potenzial erzeugen eine Potenzialbarriere, durch die ein Alpha-Teilchen "tunneln" kann.

Die Potenzialbarriere ist nicht konstant, sondern eine Funktion des Abstands: 
$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2Ze^2}{r}$$



Ladung des Alpha-Teilchens:  $2e$

Ladung des Tochterkerns:  $Ze$

## Die WKB-Näherung (Wentzel, Kramers, Brillouin)

### Schrödinger-Gleichung

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + V(x) \cdot \psi = E \cdot \psi \quad \rightarrow \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \cdot (E - V) \cdot \psi = 0 = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{p^2}{\hbar^2}$$

$$\psi(x) = A \cdot e^{\pm i \cdot k \cdot x} \quad k = \frac{p}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m \cdot (E - V)} \quad E \text{ über der Barriere: Welle mit Wellenzahl } k, \text{ Impuls reell}$$

$$\psi(x) = A \cdot e^{\pm \alpha \cdot x} \quad \alpha = \frac{|p|}{\hbar} = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2m \cdot (V - E)} \quad E \text{ unter der Barriere: exponentieller Abfall, Impuls imaginär}$$

**WKB-Näherung:** wenn sich das Potenzial langsam ändert ( $V$  über eine de-Broglie-Wellenlänge nahezu konstant), dann bleibt die Wellenfunktion sinusförmig oder exponentiell und  $A$ ,  $k$  und  $\alpha$  sind langsam veränderliche Funktionen von  $x$ . Der Exponent kann auch durch eine Phase  $\phi(x)$  ausgedrückt werden:

$$\psi(x) = A(x) \cdot e^{i \cdot \phi(x)} \quad \text{statt} \quad \psi(x) = A(x) \cdot e^{i \cdot k \cdot x}$$

**Nebenrechnung: erste und zweite Ableitung**

$$\psi' = A' \cdot e^{i \cdot \phi} + iA \cdot \phi' \cdot e^{i \cdot \phi} \quad \psi'' = A'' \cdot e^{i \cdot \phi} + iA' \cdot \phi' \cdot e^{i \cdot \phi} + iA' \cdot \phi' \cdot e^{i \cdot \phi} + iA \phi'' \cdot e^{i \cdot \phi} - A \cdot \phi'^2 \cdot e^{i \cdot \phi}$$

In die Schrödinger-Gleichung eingesetzt, durch  $e^{i\phi}$  dividiert, getrennte Gleichungen für Imaginärteil und Realteil:

$$A'' + 2iA' \cdot \phi' + iA \cdot \phi'' - A \phi'^2 + A \frac{p^2}{\hbar^2} = 0$$

$$2A' \cdot \phi' + A \phi'' = 0 \quad \rightarrow \quad (A^2 \phi')' = 0 \quad A^2 \phi' = C^2 \quad A = \frac{C}{\sqrt{\phi'}}$$

$$A'' = A \cdot \left( \phi'^2 - \frac{p^2}{\hbar^2} \right) \quad \rightarrow \quad A'' \approx 0 \quad \phi' \approx \pm \frac{p}{\hbar} \quad \phi \approx \pm \frac{1}{\hbar} \int p(x) \cdot dx \quad \text{statt} \quad \phi = \frac{p}{\hbar} x$$

**Ergebnis der Näherung**  $\psi(x) \approx \frac{C}{\sqrt{p(x)}} \cdot e^{\pm \frac{1}{\hbar} \int p(x) \cdot dx}$

**Das Integral ersetzt  $\hbar \cdot k \cdot x$  für den Fall, dass  $V$  nicht konstant ist**

wegen  $\phi' \approx p/\hbar$  (letzte Seite, unterste Zeile)

**Anwendung auf den Tunneleffekt**

$\psi(r < r_1) = A \cdot e^{i \cdot k \cdot r} + B \cdot e^{-i \cdot k \cdot r}$

$\psi(r > r_2) = F \cdot e^{i \cdot k \cdot r}$

$r_1$  ist der Kernradius

$r_2$  ist der Abstand, an dem  $E = V$  ist

$\psi(r_1 < r < r_2) = \frac{C}{\sqrt{|p(r)|}} \cdot e^{\frac{1}{\hbar} \int_{r_1}^r |p(r)| \cdot dr} + \frac{D}{\sqrt{|p(r)|}} \cdot e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{r_1}^r |p(r)| \cdot dr}$  wobei  $C = 0$

$\frac{|F|}{|A|} \approx e^{-\frac{1}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} |p(r)| \cdot dr}$   $T = e^{-2\gamma}$   $\gamma = \frac{1}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} |p(r)| \cdot dr$   **$\gamma = \text{Gamov-Faktor}$**

$\gamma = \frac{1}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m \cdot \left( \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2Ze^2}{r} - E \right)} \cdot dr = \frac{1}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{2m \cdot \left( E \frac{r_2}{r} - E \right)} \cdot dr = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \int_{r_1}^{r_2} \sqrt{\frac{r_2}{r} - 1} \cdot dr$

Substitution  $r = r_2 \sin^2 u$   $E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{2Ze^2}{r_2}$

$\gamma = \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left[ r_2 \left( \frac{\pi}{2} - \sin^{-1} \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \right) - \sqrt{r_1(r_2 - r_1)} \right] \approx \frac{\sqrt{2mE}}{\hbar} \left[ r_2 \frac{\pi}{2} - 2\sqrt{r_1 r_2} \right]$  ( $r_2 \gg r_1$  und  $\sin \phi \approx \phi$ )

**Ergebnis:**  $\gamma = K_1 \frac{Z}{\sqrt{E}} - K_2 \sqrt{Z \cdot r_1}$   $K_1 \equiv \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\pi\sqrt{2m}}{\hbar} = 1,98 \text{ MeV}^{1/2}$   $K_2 \equiv \sqrt{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \frac{4\sqrt{m}}{\hbar}} = 1,49 \text{ fm}^{-1/2}$

1 fm = 10<sup>-15</sup> m ("Fermi")

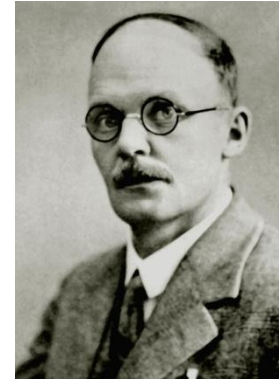
## Abschätzung der Halbwertszeit des Alpha-Strahlers

$$e^{-2\gamma} \cdot \frac{v}{2r_1}$$

Wahrscheinlichkeit pro Sekunde = Transmissionswahrscheinlichkeit · Zahl der Versuche pro Sekunde

Halbwertszeit (Kehrwert)  $\tau = e^{2\gamma} \cdot \frac{2r_1}{v} \rightarrow \ln \tau \approx -\frac{a_1}{\sqrt{E}} + a_2$

**Geiger-Nuttall-Regel**

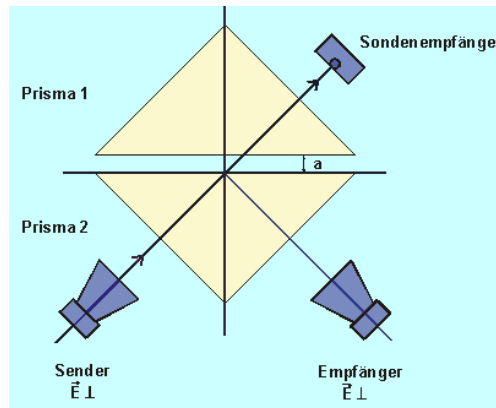
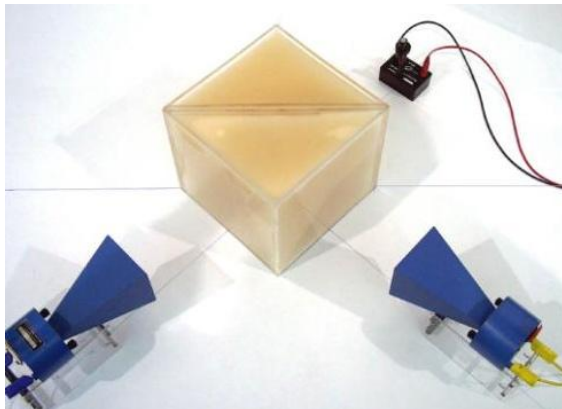


Johannes Geiger (1882-1945)

## Experiment

In Analogie zum quantenmechanischen Tunneleffekt wird das "Tunneln" von Mikrowellen (Wellenlänge ca. 3 cm) durch eine Lücke zwischen zwei mit Paraffin gefüllten Prismen (relative Permittivität ca. 2,3) demonstriert. Drei Fälle:

- (i) Prismen zusammen: gute Transmission, keine Reflexion.
- (ii) Prisma 1 entfernt: schlechte Transmission und gute Reflexion aufgrund von Totalreflexion.
- (iii) Lücke zwischen den Prismen: Transmission nimmt mit zunehmendem Abstand  $a$  (von 0 bis ca. 2 cm) ab.



## 2.10 Die Schrödinger-Gleichung in drei Dimensionen

**Dreidimensionaler Raum beschrieben durch**

- kartesische Koordinaten  $x, y, z$
- Zylinderkoordinaten  $r, z, \varphi$  (für Probleme mit Zylindersymmetrie)
- Kugelkoordinaten  $r, \theta, \varphi$  (für Probleme mit radialer Abhängigkeit z.B. Atome)

### Schrödinger-Gleichung in kartesischen Koordinaten

**Dreidimensionaler Potenzialkasten**

$$V(x, y, z) = 0 \quad \text{für} \quad 0 \leq x \leq a \quad 0 \leq y \leq b \quad 0 \leq z \leq c, \quad \text{sonst} \quad V(x, y, z) \rightarrow \infty$$

**Ansatz für die Wellenfunktion**

$$\psi(x, y, z) = f(x) \cdot g(y) \cdot h(z)$$

**nur Sinusfunktionen, weil  $\psi(0,0,0)=0$**

$$f(x) = A \cdot \sin\left(n_x \frac{\pi}{a} x\right) \quad g(y) = B \cdot \sin\left(n_y \frac{\pi}{b} y\right) \quad h(z) = C \cdot \sin\left(n_z \frac{\pi}{c} z\right) \quad n_i = 1, 2, 3 \dots$$

**Normierung**

$$\int_{x=0}^a \int_{y=0}^b \int_{z=0}^c |\psi(x, y, z)|^2 dx \cdot dy \cdot dz = 1 \quad \rightarrow \quad A \cdot B \cdot C = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{a \cdot b \cdot c}}$$

**Energie-Eigenwerte hängen von drei Quantenzahlen ab**

$$E(n_x, n_y, n_z) = \frac{\hbar^2 \pi^2}{2m} \left( \frac{n_x^2}{a^2} + \frac{n_y^2}{b^2} + \frac{n_z^2}{c^2} \right)$$

**können "entartet" sein, d.h. für verschiedene Quantenzahlen (und damit verschiedene Wellenfunktionen) kann der Energie-Eigenwert gleich sein**