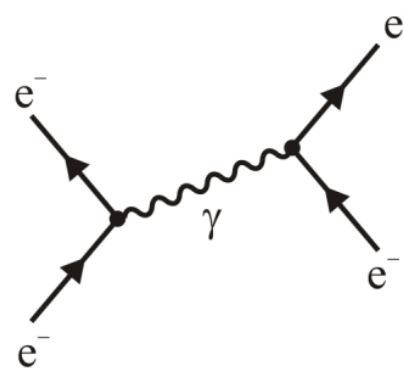
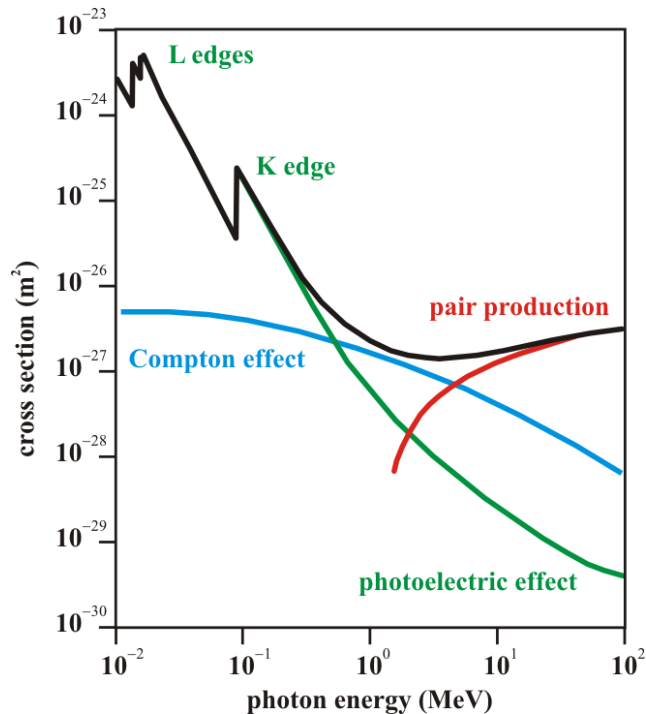


## Wechselwirkung von Photonen mit Materie

- photoelektrischer Effekt
- Comptonstreuung
- Paarbildung  $\gamma \rightarrow e^+e^-$  für Photonenenergien über  $2m_e c^2$

Die Wirkungsquerschnitte (Maß für die Wahrscheinlichkeit) für diese Prozesse lassen sich im Rahmen der Quantenelektrodynamik (QED) berechnen. Es handelt sich hierbei stets um die elektromagnetische Wechselwirkung (im Gegensatz zur starken oder schwachen Wechselwirkung und zur Gravitation), bei der die Vorstellung besteht, dass es neben "reellen" Photonen auch noch "virtuelle" Photonen gibt. Diese virtuellen Photonen werden zwischen geladenen Teilchen ausgetauscht und bewirken deren gegenseitige Anziehung oder Abstoßung.



Feynman-Diagramm



Richard P. Feynman  
(1918 - 1988)

## 2.4 Welle-Teilchen-Dualismus

### Auch für Teilchen?

Analog zu den Photonen  $\vec{p} = \hbar \cdot \vec{k}$  auch für Teilchen, z.B. Elektronen

$$\lambda = \frac{2\pi}{|\vec{k}|} = \frac{h}{p}$$

**De-Broglie-Wellenlänge**



Louis de Broglie  
(1892 - 1987)

1924 Dissertation von L. de Broglie

1926 Beugungsringe für Elektronen hinter einer Folie beobachtet (C. J. Davisson, L. H. Germer)

### Materiewellen, Wellenfunktion

$$\psi(x,t) = C \cdot e^{i(\omega t - k \cdot x)} = C \cdot e^{i(E \cdot t - p \cdot x) / \hbar}$$

$$E_{kin} = \hbar \cdot \omega = \frac{1}{2} m v^2$$

$$p = \hbar \cdot k = m \cdot v$$

$v$  = Teilchengeschwindigkeit (nicht-relativistisch)

### Phasengeschwindigkeit

Ein Punkt einer Welle mit einer bestimmten Phase (z.B. Maximum) bewegt sich mit der "Phasengeschwindigkeit"

$$e^{i(\omega t - k \cdot x)} = e^{i\varphi} \quad \text{z.B. } \varphi = 0 \quad \omega \cdot t = k \cdot x \quad \rightarrow \quad v_{ph} = \frac{\omega}{k}$$

Die Phasengeschwindigkeit kann sogar höher sein als die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit (z.B. für eine Radiowelle in einem zylindrischen Rohr), wobei keine Information transportiert wird.

Für Materiewellen:

$$v_{ph} = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p} = \frac{m \cdot v^2}{2} \cdot \frac{1}{m \cdot v} \quad \rightarrow \quad v_{ph} = \frac{v}{2}$$

$$\psi(x,t) = C \cdot e^{i(\omega t - k \cdot x)} = C \cdot e^{i(Et - p \cdot x)/\hbar}$$

$$E_{kin} = \hbar \cdot \omega = \frac{1}{2} m v^2 \quad p = \hbar \cdot k = m \cdot v$$

$$E = \frac{p^2}{2m}$$

## Gruppengeschwindigkeit

Wenn die Welle nicht beliebig ausgedehnt ist, sondern eine Einhüllende hat (z.B. rechteckig oder gaußförmig), bewegt sich die Einhüllende mit der "Gruppengeschwindigkeit", die von der Phasengeschwindigkeit abweichen kann. Um eine Einhüllende zu erzeugen, benötigt man mindestens zwei Frequenzen und Wellenzahlen

$$\omega \quad \text{und} \quad \omega + \Delta\omega \quad \text{mit} \quad k \quad \text{und} \quad k + \Delta k$$

(eine einzige Frequenz würde ja einer unendlich ausgedehnten Sinuswelle entsprechen). Ein Maximum der Einhüllenden erhält man für Phasengleichheit der beiden Teilwellen

$$\omega \cdot t - k \cdot x = (\omega + \Delta\omega) \cdot t - (k + \Delta k) \cdot x \quad \rightarrow \quad 0 = \Delta\omega \cdot t - \Delta k \cdot x$$

$$v_g = \frac{x}{t} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} \quad \rightarrow \quad v_g = \frac{d\omega}{dk}$$

Dispersionsrelation  $\omega(k)$  für Photonen bzw. Lichtwellen im Vakuum:

$$\omega(k) = \frac{E}{\hbar} = \frac{c \cdot p}{\hbar} = c \cdot k \quad \text{linear} \rightarrow \text{keine Dispersion}$$

Dispersionsrelation  $\omega(k)$  für Materiewellen (nicht relativistisch):

$$\omega(k) = \frac{E}{\hbar} = \frac{p^2}{2m \cdot \hbar} = \frac{\hbar \cdot k^2}{2m} \quad \text{nicht linear} \rightarrow \text{Dispersion}$$

Gruppengeschwindigkeit:  $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d}{dk} \left( \frac{\hbar^2 k^2}{2m \cdot \hbar} \right) = \frac{\hbar \cdot k}{m} = \frac{p}{m} \quad \rightarrow \quad v_g = v$

**Dispersion**  $v_{ph} \neq v_g = v$  **Teilchengeschwindigkeit = Gruppengeschwindigkeit: Wellenpakete**

## Kopenhagener Deutung (1927)

### Wahrscheinlichkeitsinterpretation

$$|\psi(x, t)|^2 dx \quad \text{mit} \quad \int_{x=-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1$$

ist die Wahrscheinlichkeit, ein Teilchen zur Zeit  $t$  an einem Ort zwischen  $x$  und  $x+dx$  anzutreffen. Wo sich das Teilchen bei einer Messung befinden wird, kann (nach der Kopenhagener Deutung) prinzipiell nicht vorhergesagt werden.



Max Born  
(1882 - 1970)



Werner Heisenberg  
(1901 - 1976)



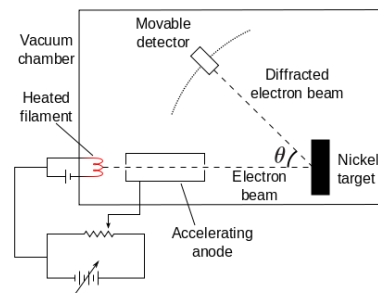
Niels Bohr  
(1885 - 1962)

### Alternative Deutungen

- es gibt unbekannte "verborgene Variablen", die den Ort des Teilchens festlegen (David Bohm)
- verschiedene Messergebnisse in verschiedenen "Welten" realisiert (Viele-Welten-Theorie)



Clinton Davisson und Halbert Germer  
(1881 - 1958) (1896 - 1971)



## Experiment von Davisson und Germer

Physical Review 30, 705 (1927)

Ein Elektronenstrahl wird auf eine Nickelprobe gelenkt. Die Winkelverteilung der gestreuten Elektronen zeigt ein Interferenzmuster (Hinweis auf die Wellennatur der Elektronen).

## 2.5 Materiewellen und Unschärferelation

### Wellenfunktion

Teilchen werden durch Wellenpakete dargestellt und haben eine de-Broglie-Wellenlänge  
Teilchengeschwindigkeit entspricht der Gruppengeschwindigkeit der Welle

$$\psi(x,t) = C_0 \cdot e^{i(\omega t - k \cdot x)} = C_0 \cdot e^{i(E \cdot t - p \cdot x)/\hbar} \quad E_{kin} = \hbar \cdot \omega \quad p = \hbar \cdot k$$

$$|\psi(x,t)|^2 dx \quad \text{mit} \quad \int_{x=-\infty}^{\infty} |\psi(x,t)|^2 dx = 1$$

Betragsquadrat der Wellenfunktion ( $\cdot dx$ ) ist die Wahrscheinlichkeit, das Teilchen zur Zeit  $t$  in  $[x, x+dx]$  zu finden.  
Der Determinismus wird zu Gunsten einer Wahrscheinlichkeitsinterpretation (Kopenhagener Deutung) aufgegeben.

Ein Wellenpaket enthält ein Spektrum von  $k$ -Werten (ein scharfer  $k$ -Wert erzeugt einen unendlichen Wellenzug)

$$\psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k) \cdot e^{i(k \cdot x - \omega t)} \cdot dk \quad \text{z.B. } t = 0 \quad \psi(x,t) = \int_{-\infty}^{\infty} C(k) \cdot e^{i \cdot k \cdot x} \cdot dk$$

Spektrum und Wellenfunktion sind durch Fourier-Transformation verknüpft, d.h.

schmales Spektrum, kleine Impulsunschärfe  $\leftrightarrow$  breite Verteilung in  $x$ , große Ortsunschärfe  
breites Spektrum, große Impulsunschärfe  $\leftrightarrow$  schmale Verteilung in  $x$ , kleine Ortsunschärfe

kastenförmige Verteilung der  $k$ -Werte  $\leftrightarrow$   $[\sin(x)/x]^2$ -Form des Wellenpakets  
normalverteilte  $k$ -Werte  $\leftrightarrow$  Gauß-förmiges Wellenpaket

z.B. normalverteilte  $k$ -Werte:  $C(k) \propto e^{-\frac{1}{2} \frac{(k-k_0)^2}{\sigma_k^2}}$

$$\psi(x,0) \propto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{(k-k_0)^2}{\sigma_k^2}} \cdot e^{i \cdot k \cdot x} \cdot dk \propto e^{-\sigma_k^2 \cdot x^2}$$

$$|\psi(x,0)|^2 \propto e^{-2\sigma_k^2 \cdot x^2} = e^{-\frac{1}{2} \frac{x^2}{\sigma_x^2}} \rightarrow \sigma_x^2 \cdot \sigma_k^2 = \frac{1}{4}$$

$$\sigma_x \cdot \sigma_k = \frac{1}{2}$$



Werner Heisenberg (1901 - 1976)

$\sigma$  ist die Standardabweichung, andere Konvention  $\Delta x \equiv 2\sigma_x$  und  $\Delta k = \sigma_k$

$$\Delta x \cdot \Delta k = 1$$

$$\Delta x \cdot \Delta p_x = \hbar$$

bei anderen  $k,x$ -Verteilungen ist das Produkt größer

$$\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \hbar$$

**Heisenbergsche Unschärferelation (1927)**

ursprünglich  $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq h$  (wieder andere Definition der Breite)

**Bedeutung:**

- man kann keinen Zustand herstellen, bei dem Ort und Impuls eines Teilchens beliebig genau festgelegt sind
- man kann Ort und Impuls eines Teilchens nicht beliebig genau gleichzeitig messen
- Wellenpakete "zerfließen"

z.B. Messung von Ort und Impuls bei  $t = 0$ :

$$\Delta x(t) = \sqrt{\Delta x^2(0) + \Delta v_g^2 \cdot t^2} = \sqrt{\Delta x^2(0) + \frac{\Delta p^2(0)}{m^2} \cdot t^2}$$

Jede genauer der Ort gemessen wurde, desto geringer die Breite des Pakets in  $x$  bei  $t = 0$ , aber desto schneller läuft das Paket auseinander.

$$\Delta x(t) = \sqrt{\Delta x^2(0) + \frac{\hbar^2}{m^2 \cdot \Delta x^2(0)} \cdot t^2} \approx \frac{\hbar}{m \cdot \Delta x(0)} \cdot t$$

**Im Alltag mit massiven Teilchen nicht beobachtbar, z.B. 1  $\mu\text{m}$  großes Körnchen unter einem Mikroskop:**

$$\Delta x = 1 \mu\text{m} = 10^{-6} \text{ m} \quad m = \rho \cdot V \approx 1 \text{ kg/m}^3 \cdot (10^{-6} \text{ m})^3 = 10^{-18} \text{ kg}$$

$$\Delta p \geq \frac{\hbar}{\Delta x} = \frac{6,6 \cdot 10^{-34} \text{ kg} \cdot \text{m}^2/\text{s}}{6,28 \cdot 10^{-6} \text{ m}} \approx 10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m/s}$$

$$\Delta v \geq \frac{\Delta p}{m} = \frac{10^{-28} \text{ kg} \cdot \text{m/s}}{10^{-18} \text{ kg}} = 10^{-10} \text{ m/s}$$

### Unschärferelationen zwischen anderen physikalischen Größen

**z.B. Energie und Zeit**

Frequenzverteilung am Ort  $x = 0$ :  $C(\omega) \propto e^{-\frac{1}{2} \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\sigma_\omega^2}}$

$$\psi(0, t) \propto \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \frac{(\omega - \omega_0)^2}{\sigma_\omega^2}} \cdot e^{-i \cdot \omega \cdot t} \cdot d\omega \propto e^{-\sigma_\omega^2 \cdot t^2}$$

$$|\psi(0, t)|^2 \propto e^{-2\sigma_\omega^2 \cdot t^2} = e^{-\frac{1}{2} \frac{t^2}{\sigma_t^2}} \quad \rightarrow \quad \sigma_\omega \cdot \sigma_t = \frac{1}{2}$$

$$E = \hbar \cdot \omega$$

$$\Delta E \cdot \Delta t \geq \hbar$$

## Doppelspaltexperimente mit Licht

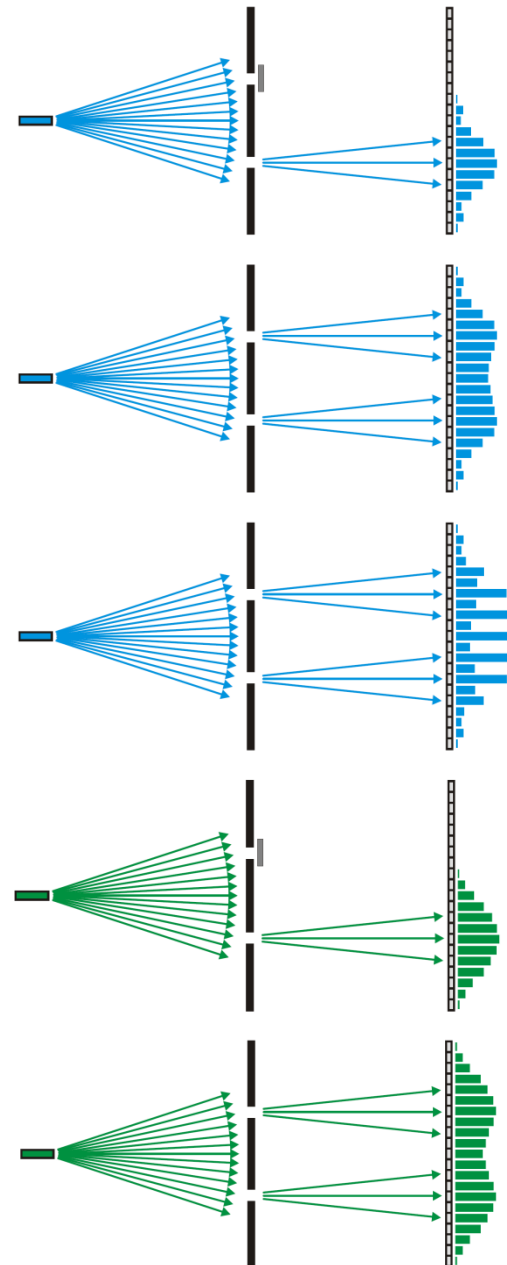
- ein Spalt verdeckt:  
Beugungsmuster des Spalts
- beide Spalte, aber inkohärentes Licht:  
doppeltes Maximum
- beide Spalte und kohärentes Licht:  
Interferenzmuster,  
Abstand der Streifen hängt von Spaltabstand ab,  
Einhüllende ist (im Fernfeld) Beugungsmuster des Spalts  
Intensität proportional zum Betragsquadrat des (komplexen) E-Felds

$$I \propto |\vec{E}|^2 = |\vec{E}_1 + \vec{E}_2|^2$$

## Doppelspaltexperimente mit Kugeln (z.B. Fußbälle)

- ein Spalt verdeckt:  
ein Maximum
- beide Spalte:  
doppeltes Maximum  
Intensität proportional zur Wahrscheinlichkeit der Auftreffpunkte

$$I \propto P = P_1 + P_2$$





## Doppelspaltexperimente mit Elektronen

- ein Spalt verdeckt:  
Beugungsmuster des Spalts
- beide Spalte und Wege nicht unterscheidbar:  
Interferenzmuster,  
Abstand der Streifen hängt von Spaltabstand ab,  
Einhüllende ist (im Fernfeld) Beugungsmuster des Spalts  
Intensität proportional zum Betragsquadrat der Gesamtwellenfunktion,  
d.h. der Summe beider Wellenfunktionen

$$I \propto P = |\psi|^2 = |\psi_1 + \psi_2|^2$$

- Wege unterscheidbar (z.B. an Elektronen gestreutes Licht detektiert):  
Interferenzmuster verschwindet  
Intensität proportional zur Summe der Wahrscheinlichkeiten

$$I \propto P = P_1 + P_2 = |\psi_1|^2 + |\psi_2|^2$$

### Wie kann sich das Muster auf dem Schirm ändern?

Die Streuung am Licht stört die Bahnen der Elektronen; generell: Messprozesse beeinflussen stets die Messung.

Interferenz tritt auf, wenn zwei (oder mehrere) Wege zum selben Endzustand führen und nicht beobachtet werden. Das können geometrische Wege sein, aber auch z.B. energetische Zwischenzustände eines Atoms, Kerns usw. oder ununterscheidbare Teilchen.

### Experimente

- Thomas Young (1802)
- Claus Jönsson, Zeitschrift f. Physik 161 (1961), 454
- später auch Neutronen, Atome, Moleküle (z.B. Fullerene 2000)

