

## 2.8 Hydrodynamik und Aerodynamik (Fortsetzung)

### 2.8.6 Viskosität

Die Bewegung von Fluiden (Flüssigkeiten oder Gase) oder die Bewegung eines Körpers durch ein Fluid ist nie reibungsfrei. Bereits früher erwähnt wurde die Reibungskraft auf eine Kugel in einer zähen Flüssigkeit:

$$F_S = 6\pi \cdot \eta \cdot R \cdot v \quad [\eta] = 1 \frac{\text{N s}}{\text{m}^2} \quad \begin{array}{l} \eta: \text{Viskosität der Flüssigkeit} \\ R: \text{Radius der Kugel} \\ v: \text{Geschwindigkeit der Kugel} \end{array}$$

**Beispiel:** Kugel fällt in einer Flüssigkeit. Im Gleichgewicht: Schwerkraft – Auftrieb = Reibungskraft

$$m_K \cdot g - m_F \cdot g = (\rho_K - \rho_F) \cdot \frac{4}{3} \pi \cdot R^3 \cdot g = 6\pi \cdot \eta \cdot R \cdot v$$

Hieraus kann z.B. bei bekannter Viskosität die Gleichgewichtsgeschwindigkeit  $v$  ausgerechnet werden, oder die Viskosität wird über eine Messung der Geschwindigkeit bestimmt.

Das Standardbeispiel zur Definition der Viskosität ist ein Fluid zwischen zwei Platten. Die Kraft pro Fläche, die aufgewandt wird, um eine Platte gegen die andere zu bewegen, ist

$$\frac{F}{A} = \frac{\dot{p}}{A} = -\eta \cdot \frac{dv_{\perp}}{dx}$$

Kraft pro Fläche = Änderung des Impulses pro Fläche = sog. Impulsstromdichte. Der Vorgang kann als Transport vom Impuls zwischen den beiden Flächen aufgefasst werden. Mehr zu Transportprozessen später.

Typische Zahlenwerte: Viskosität von Wasser bei 20°C ca.  $10^{-3} \text{ N s/m}^2$ , Luft ca.  $10^{-5} \text{ N s/m}^2$ .

Bei Flüssigkeiten, zwischen deren Molekülen temperaturabhängige Kräfte wirken, nimmt die Viskosität mit der Temperatur ab (z.B. ist Motoröl weniger zäh, wenn der Motor warm ist).

Bei Gasen steigt die Zahl der Kollisionen zwischen Molekülen und damit die Viskosität mit der Temperatur.

**Beispiel:** Durchfluss eines Fluids der Viskosität  $\eta$  durch ein Rohr mit Radius  $R$ . An der Außenwand eines gedachten Zylinders mit Radius  $r$  und Länge  $\Delta l$  innerhalb des Rohrs gilt für die Reibungskraft

$$\frac{F_R}{2\pi \cdot r \cdot \Delta l} = -\eta \cdot \frac{dv}{dr} \quad \rightarrow \quad F_R = -2\pi \cdot r \cdot \Delta l \cdot \eta \cdot \frac{dv}{dr}$$

Ihr entgegen wirkt die Druckdifferenz  $\Delta p$  Druck (Druck = Kraft pro Fläche):

$$\frac{F_p}{\pi \cdot r^2} = -\Delta p \quad \rightarrow \quad F_p = -\Delta p \cdot \pi \cdot r^2$$

Gleichgesetzt, nach  $dv$  aufgelöst und integriert (von  $R$  bis  $r$ ):

$$dv = \frac{\Delta p}{2\eta \cdot \Delta l} \cdot r \cdot dr \quad \rightarrow \quad \int_{v(R)}^{v(r)} dv = v(r) = \frac{\Delta p}{4\eta \cdot \Delta l} (r^2 - R^2) \quad v_{\max} = -\frac{\Delta p}{4\eta \cdot \Delta l} R^2$$

Die mittlere Geschwindigkeit erhält man durch Integration von  $v(r)$ . Das Ergebnis ist (Übungsaufgabe?)

$$\bar{v} = \frac{1}{2} v_{\max} \quad \rightarrow \quad \bar{v} \cdot A = \frac{\pi}{8\eta} \cdot \frac{\Delta p}{\Delta l} R^4 \quad \begin{array}{l} \text{mittl. Geschwindigkeit} \cdot \text{Fläche} = \text{Durchflussmenge} \\ \text{(Volumen pro Sekunde)} \end{array}$$

**Gesetz von Hagen-Poiseuille:** Die Durchflussmenge steigt mit  $R^4$ .

## 2.8.7 Die Reynolds-Zahl

Strömungen von Fluiden können **laminar** oder **turbulent** sein. Bei turbulenten Strömungen treten Wirbel auf. Sie können nicht mehr durch einfache Feldlinienbilder dargestellt werden und ihre Eigenschaften sind viel schwieriger zu berechnen. Welche Art von Strömung vorliegt, kann durch die dimensionslose

**Reynolds-Zahl**

$$\text{Re} = \frac{\rho \cdot v \cdot d}{\eta}$$

$\rho$ : Dichte       $v$ : Strömungsgeschwindigkeit  
 $\eta$ : Viskosität       $d$ : typische räumliche Größe

abgeschätzt werden. Bei turbulenten Strömungen ist die Reynolds-Zahl groß (ein paar 1000). Hier ist die kinetische Energie von Wirbeln in der Größenordnung der Reibungsenergie.

### 2.8.8 Strömende Gase (Aerodynamik)

Bei der Dynamik von Gasen muss ihre Kompressibilität berücksichtigt werden, die man bei Flüssigkeiten i.d.R. vernachlässigen kann. Trotzdem gelten die bisher beschriebenen Gesetzmäßigkeiten zumindest qualitativ.

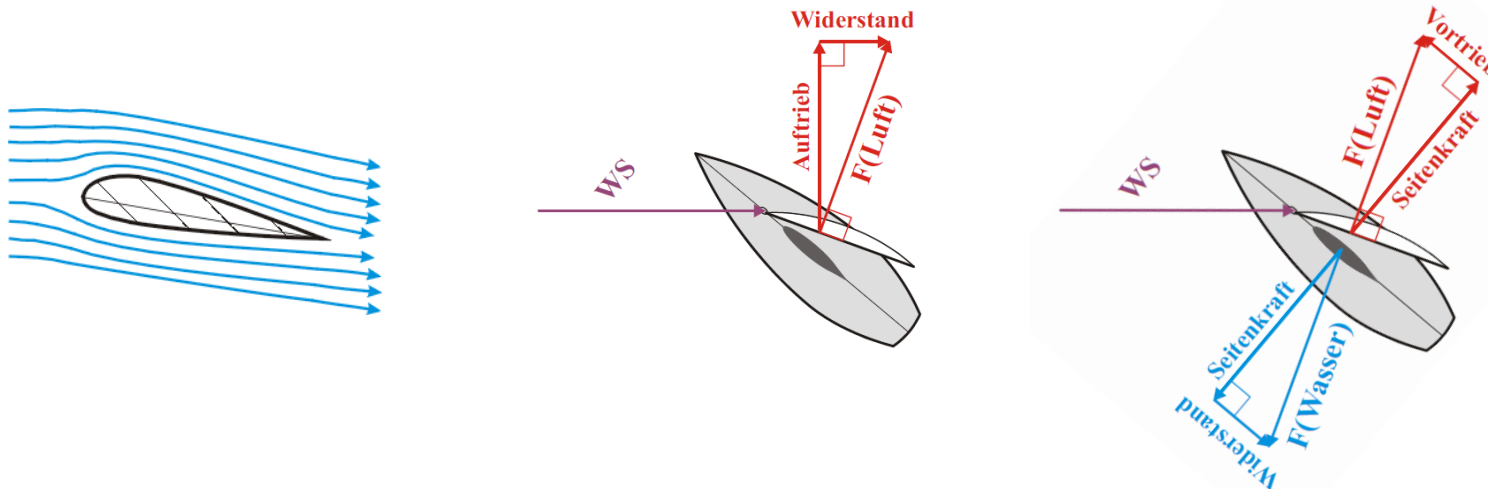
Von großer praktischer Bedeutung ist der sog. dynamische Auftrieb, eine Kraft quer zur Strömungsrichtung. Sie wirkt z.B. bei Flugzeugflügeln, bei Rotoren (Hubschrauber, Windkraftanlagen) und bei Segeln.

### Fliegen und Segeln

Beim Fliegen entsteht die Strömung durch die Bewegung des Flugzeugs (Vortrieb durch Triebwerk oder Gleiten), beim Segeln wird die Strömung des Winds ausgenutzt. Die Aufteilung der Kraft, die von der Luft auf Flügel bzw. Segel ausgeübt wird, ist sehr ähnlich. Sie wird aber unterschiedlich aufgeteilt, je nachdem welche Komponenten ausgenutzt werden bzw. unerwünscht sind.

**Fliegen:** Widerstand parallel zur Strömungsrichtung  $\leftrightarrow$  Vortrieb z.B. durch Motor und Propeller  
Auftrieb senkrecht zur Strömungsrichtung  $\leftrightarrow$  Gewichtskraft

**Segeln:** Vortrieb parallel zur Kiellinie  $\leftrightarrow$  Luft- und Wasserwiderstand  
Seitenkraft senkrecht zur Kiellinie  $\leftrightarrow$  Wasserwiderstand von Kiel oder Schwert



Neben dem Luftwiderstand in Strömungsrichtung entsteht der dynamische Auftrieb senkrecht zur Strömung dadurch, dass die Strömung oberhalb des Flügels (an der Außenseite des Segels) schneller strömt und dadurch gemäß der Bernouille-Gleichung ein Unterdruck entsteht:

$$p_1 + \frac{\rho}{2} \cdot v_1^2 = p_2 + \frac{\rho}{2} \cdot v_2^2 \quad \rightarrow \quad \Delta p = p_1 - p_2 = \frac{F_A}{A} = c_A \cdot \frac{\rho}{2} \cdot (v_2^2 - v_1^2)$$

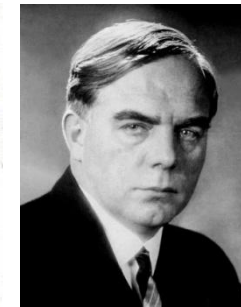
Hier wurde noch der sog. Auftriebsbeiwert  $c_A$  eingefügt, der von der Form des Flügels (Segels) und dem Anstellwinkel abhängt. Oft wird behauptet, die Strömung sei an der Oberseite schneller, weil der Weg länger sei und die Strömungen oberhalb und unterhalb des Flügels gleichzeitig ankommen müssten – dies ist nicht richtig. Die maßgebliche Größe für den Auftrieb ist die sogenannte Zirkulation  $\Gamma$

**Satz von Kutta-Schukowski:**  $\text{Auftrieb/Länge} = \frac{F_A}{L} = -\rho \cdot v_\infty \cdot \Gamma \quad \Gamma = \oint v \cdot ds$

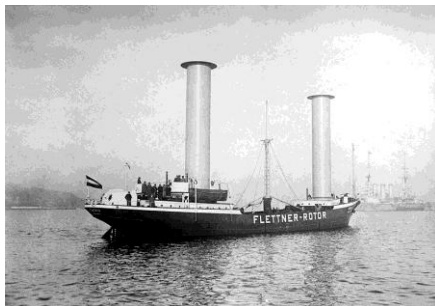
Die Zirkulation entsteht durch die Asymmetrie des Flügels, kann aber auch durch eine rotierende Walze erzeugt werden, an deren Oberfläche die Luft mitbewegt wird. Dieser sog. Magnus-Effekt wird beim Flettner-Rotor angewandt, der vereinzelt zum Antrieb von Schiffen angewandt wurde (s. Bilder). Die Rotoren müssen zwar mit Motoren angetrieben werden, aber die Ersparnis durch Windkraft ist um ein Vielfaches größer als der Aufwand.



Gustav Magnus  
1802-1870



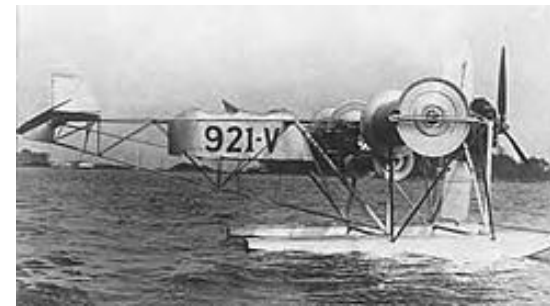
Anton Flettner  
1885-1961



Das erste Schiff mit Flettner-Rotoren:  
MS Buckau (1924).



Experimentelles Frachtschiff mit  
Flettner-Rotoren zur Treibstoffersparnis.



Um 1930 entwickeltes Flugzeug mit Flettner-  
Rotoren statt Tragflügeln.

## Deformation fester Körper

Reale Körper können auf verschiedene Weise deformiert werden. Das Hookesche Gesetz wurde bereits erwähnt, z.B. bei der Auslenkung einer Spiralfeder

$$F = -k \cdot L$$

Die Kraft  $F$  ist proportional zur Auslenkung  $L$  und  $k$  ist die Federkonstante. Allgemein gilt dies nicht nur für Spiralfedern, sondern für alle Festkörper. Eine andere Schreibweise ist

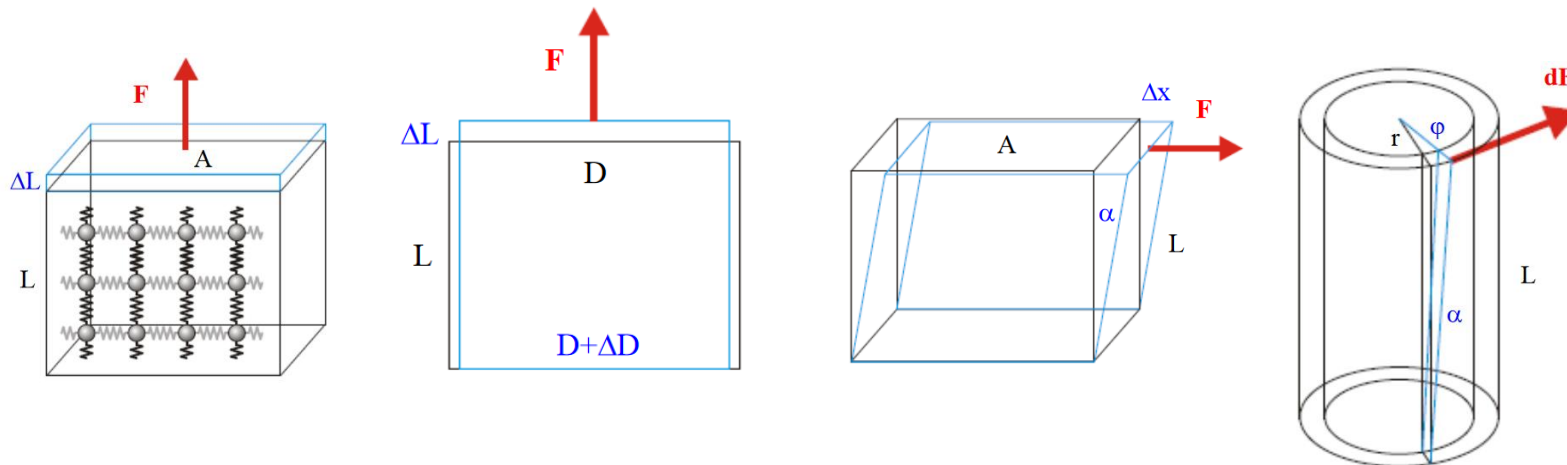
$$\sigma = \frac{F}{A} = E \cdot \frac{\Delta L}{L}$$

$\sigma$ : Zugspannung = Zugkraft / Fläche  
 $\Delta L/L$ : relative Auslenkung  
 $E$ : Elastizitätsmodul

Neben der Längenänderung durch Zug mit dem Elastizitätsmodul als Materialkonstante gibt es noch andere Deformationen mit entsprechenden Konstanten, z.B.

- Kompression: Verkleinerung des Volumens (Kompressibilität)
- Scherung und Torsion: tangentielle Kraft an einer Fläche (Schubmodul, Schermodul, Torsionsmodul)
- Biegung von Balken etc.

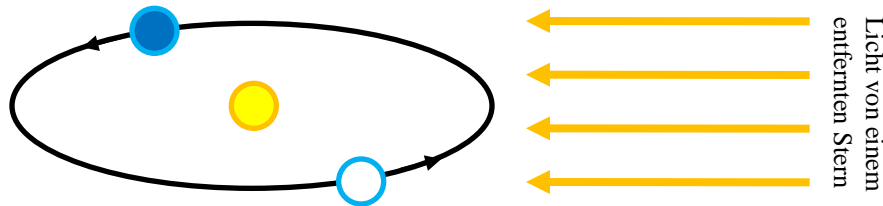
Diese Deformationen werden in dieser Vorlesung aus Zeitgründen nicht im Detail behandelt.



## 2.9 Nochmals Bezugssysteme: die spezielle Relativitätstheorie

### 2.9.1 Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

Gegen Ende des 19. Jahrhunderts konnte in sorgfältigen Messungen (Michelson und Morley seit 1881) keine Richtungsabhängigkeit der Lichtgeschwindigkeit festgestellt werden – im Widerspruch zur damals favorisierten "Äther"-Theorie. Zum Beispiel ist die Geschwindigkeit des Lichts von einem Stern unabhängig davon, ob sich die Erde auf den Stern zu- oder wegbewegt. In einer 1905 veröffentlichten Arbeit beschrieb Albert Einstein die bizarren Konsequenzen der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit. Sie sind Gegenstand der "speziellen Relativitätstheorie". Anmerkung: Die 1916 von Einstein vorgestellte "allgemeine Relativitätstheorie" ist eine Beschreibung der Gravitation als Raumkrümmung in der Umgebung von Massen und beruht auf der Äquivalenz von schwerer und träger Masse.



Albert Einstein  
1879-1955



Hendrik A. Lorentz  
1853-1928

### 2.9.2 Lorentz-Transformation und Minkowski-Diagramme

Bei der Galilei-Transformation sind Ortskoordinaten in zwei Bezugssystemen verschieden, wenn sie sich gegeneinander mit konstanter Geschwindigkeit  $v$  bewegen. Die Konstanz der Lichtgeschwindigkeit erzwingt, dass sich auch die Zeitkoordinate verändert. Dies beschreibt die sog. **Lorentz-Transformation**, die hier nicht hergeleitet werden soll.

**Galilei-Transformation**

$$x' = x - vt$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = t$$

**Lorentz-Transformation**

$$x' = \gamma(x - vt)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

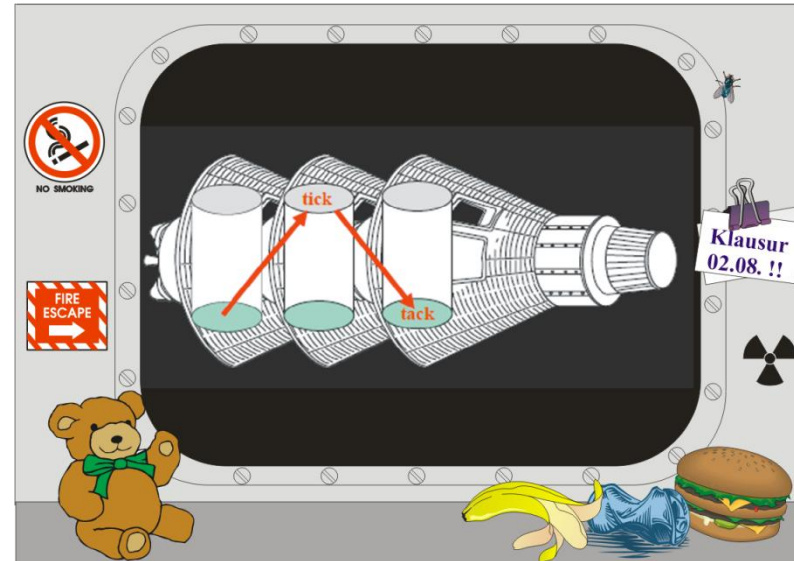
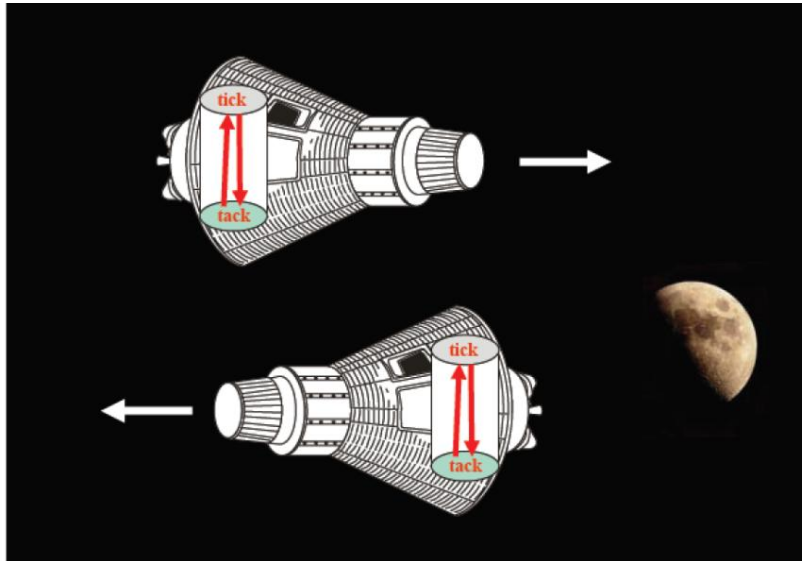
$$t' = \gamma\left(t - vx/c^2\right)$$

Lorentz-Faktor:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}}$$

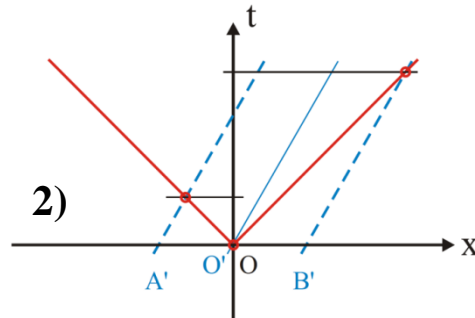
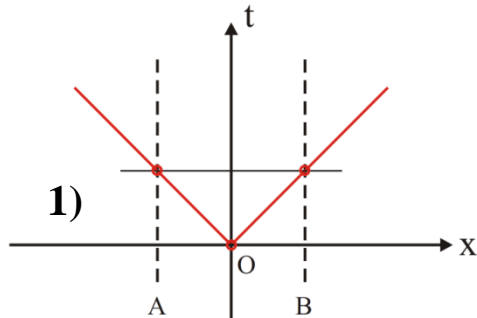
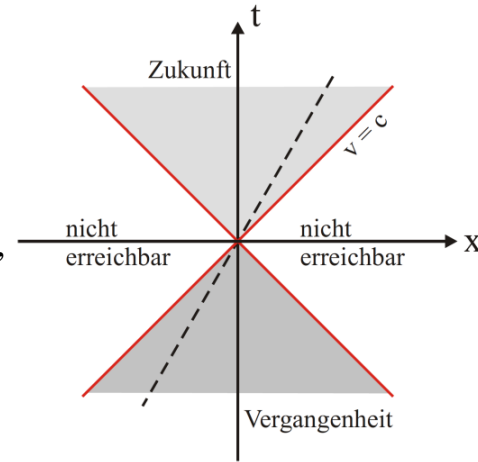
Für Geschwindigkeit 0 ist  $\gamma = 1$   
für Elektronen in DELTA  $\gamma \approx 3000$ .

Für kleine Geschwindigkeiten  $v \ll c$  geht die Lorentz-Transformation in die Galilei-Transformation über.



Die Notwendigkeit, die Zeitkoordinate einzubeziehen, erkennt man leicht am folgenden Beispiel: Eine "Lichtuhr" gibt mit einem Lichtpuls, der sich zwischen zwei Spiegeln bewegt, die Zeit an. Wenn die Uhr ruht, ist der Weg des Lichtpulses zwischen zwei Reflexionen gleich dem Spiegelabstand. Wenn sich die Uhr bewegt, ist der Weg länger. Aufgrund der Konstanz der Lichtgeschwindigkeit ist dann auch das Zeitintervall zwischen zwei Reflexionen länger. In jeden der oben gezeigten Raumschiffe läuft für einen Beobachter die Zeit im jeweils anderen Raumschiff langsamer ab.

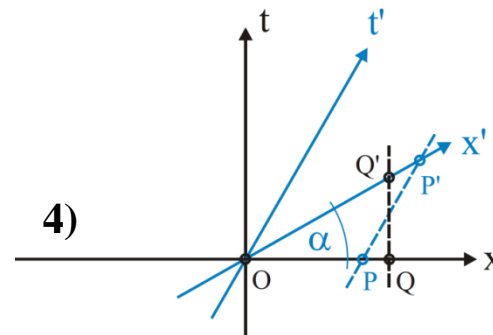
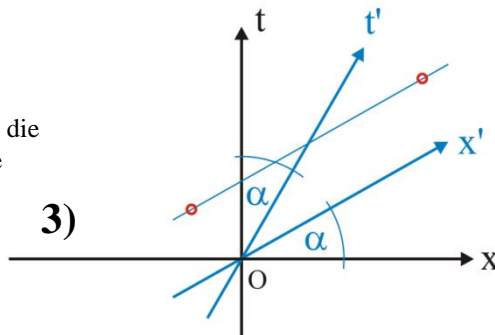
In einem **Minkowski-Diagramm** ist die Zeit  $t$  gegen eine Ortskoordinate  $x$  so aufgetragen, dass eine Steigung von  $\Delta t/\Delta x = 1$  der Lichtgeschwindigkeit entspricht. Die Bereiche in Vergangenheit und Zukunft, die mit dem Koordinatenursprung in Verbindung stehen können (z.B. durch Lichtsignale), werden "Lichtkegel" genannt. Mit solchen Diagrammen können Aussagen der speziellen Relativitätstheorie veranschaulicht werden, z.B. die Längenkontraktion:



1) Zwei Ereignisse sind für mich gleichzeitig, wenn zwei gleichzeitig am Ursprung ausgesandte Lichtpulse sich gleich weit zum Ereignis bewegt haben ( $OA = OB$ ).

2) Zwei Ereignisse, die für einen bewegten Beobachter gleichzeitig sein müssen ( $OA' = OB'$ ), sind für mich nicht gleichzeitig.

3) Aus den beiden obigen Ereignissen kann ich die  $x'$ -Achse rekonstruieren, auf der alle Ereignisse liegen, die für den bewegten Beobachter zum Zeitnullpunkt geschehen (die er als "jetzt" bezeichnen würde).



4) Zwei gleich lange Stäbe erscheinen im jeweils anderen System verkürzt. Das linke Ende der Stäbe sei zur Zeit null in O, das rechte Ende des in meinem System ruhenden Maßstabs ist Q bzw. Q', das rechte Ende des bewegten Maßstabs ist P bzw. P'. Maßgeblich für die Länge des Stabs ist, wo das rechte Ende "jetzt" ist, also für mich entlang der  $x$ -Achse, für den bewegten Beobachter entlang der  $x'$ -Achse. Wenn der Verkürzungsfaktor  $OP/OQ$  in meinem System nicht gleich den Faktor  $OQ'/OP'$  im bewegten System wäre, dann wäre ein System vor dem anderen ausgezeichnet.



### 2.9.3 Aussagen der speziellen Relativitätstheorie (z.T. ohne Beweis)

**Lorentzkontraktion:** In zwei gegeneinander bewegten Bezugssystemen erscheinen\*) die im jeweils anderen System ruhende Maßstäbe verkürzt (siehe Minkowski-Diagramme vorige Seite).

$$L = L_0 / \gamma$$

**Zeitdilatation:** In zwei gegeneinander bewegten Bezugssystemen erscheint\*) die Zeit des jeweils anderen Systems verlangsamt (siehe Beispiel der Lichtuhren).

$$\Delta t = \Delta t_0 \cdot \gamma$$

\*) "erscheint" ist hier nicht im Sinn einer Täuschung gemeint, sondern es handelt sich um messbare Tatsachen.

**Relativistischer Dopplereffekt:** Beim akustischen Dopplereffekt verschiebt sich die Frequenz eines Schallsignals nach oben/unten, wenn sich die Quelle nähert/entfernt (z.B. vorbeifahrender Krankenwagen). Einen ähnlichen Effekt (wenngleich anderer Ursache) gibt es auch bei Lichtquellen. Das Licht von Sternen, die sich von uns entfernen, erscheint rotverschoben.

$$f = f_0 \sqrt{\frac{c+v}{c-v}} \quad v: \text{ Geschwindigkeit zum Beobachter hin}$$

**Relativistische Massenzunahme:** Die Lichtgeschwindigkeit kann von Körpern mit Masse nicht erreicht werden. Bei gleicher Kraft ist die Beschleunigung um so kleiner, je größer die Geschwindigkeit ist. Dies kann als Zunahme der Masse gedeutet werden:

$$m = m_0 \cdot \gamma$$

**Masse-Energie-Äquivalenz:** Die relativistische Massenzunahme entspricht einer Zunahme an kinetischer Energie. Die Masse bei Geschwindigkeit null entspricht einer "Ruheenergie"

$$E = m \cdot c^2 = m_0 \cdot \gamma \cdot c^2$$

**Relativistische Impuls** = relativistische Masse · Geschwindigkeit

$$\vec{p} = m \cdot \vec{v} = m_0 \cdot \gamma \cdot \vec{v}$$

**Relativistischer Energiesatz** unter Einbeziehung der Ruheenergie

$$E = \sqrt{m_0^2 \cdot c^4 + p^2 \cdot c^2}$$

## Beispiele

**Myonenzerfall:** Myonen sind Elementarteilchen ähnlich den Elektronen (sogenannte "Leptonen"), aber sie sind schwerer ( $m_\mu \approx 206,8 \cdot m_e$ ) und nicht stabil (mittlere Lebensdauer  $\tau = 2,2 \mu\text{s}$ , d.h. nach dieser Zeit sind noch  $1/e \approx 0,37$  der ursprünglichen Myonen vorhanden).  $\mu^- \rightarrow e^- + \bar{\nu}_e + \bar{\nu}_\mu$  (Elektron und Neutrinos)

Myonen entstehen in ca. 20 km Höhe durch den Zerfall von Pionen, die wiederum durch den Eintritt der kosmischen Strahlung (hauptsächlich Protonen) in die Atmosphäre entstehen. In  $2,2 \mu\text{s}$  können die Myonen sich höchstens um 660 m bewegt haben (wenn sie fast mit Lichtgeschwindigkeit fliegen).

Trotzdem werden sie am Erdboden in großer Zahl nachgewiesen. Grund:

Aus der Sicht des Experimentators zerfallen schnelle Myonen langsamer aufgrund der Zeitdilatation.

Aus der Sicht der Myonen zerfallen sie in  $2,2 \mu\text{s}$ , aber die Strecke zum Erdboden ist Lorentz-kontrahiert.

**Zwillingsparadoxon:** Ein Zwilling begibt sich auf einen Raumflug, der andere bleibt auf der Erde. Man kann nachrechnen, dass der Raumfahrer bei seiner Rückkehr weniger gealtert ist als der andere Zwilling. Dies wurde 1971 mit Atomuhren bestätigt, die auf Linienflugzeugen mitgenommen wurden (allerdings spielten hier auch Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie eine Rolle).

**Elektronen im Speicherring DELTA:** Da Teilchen in Beschleunigern und Speicherringen sich oft mit nahezu Lichtgeschwindigkeit bewegen, spielen relativistische Effekte hier eine große Rolle.

Strahlenergie bei DELTA:  $1,5 \text{ GeV} = 1,5 \cdot 10^9 \text{ eV}$  (Energieeinheit  $1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$ )

Ruheenergie des Elektrons:  $511 \text{ keV} = 5,11 \cdot 10^5 \text{ eV}$  (Ruhemasse  $9,11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ )

Lorenzfaktor:  $E = m \cdot c^2 = m_0 \cdot \gamma \cdot c^2 \quad \rightarrow \quad \gamma = \frac{m \cdot c^2}{m_0 \cdot c^2} = 2935$

d.h. die Masse der Elektronen ist um den Faktor 2935 erhöht, Vorgänge im Elektronenstrahl (z.B. Streuprozesse) sind im Laborsystem 2935-fach verlangsamt. Weitere Konsequenz: die Synchrotronstrahlung, die im System der Elektronen in alle Richtungen emittiert wird, ist im Laborsystem in einem engen Kegel (halber Öffnungswinkel  $1/\gamma = 1/2935 = 0,34 \text{ mrad}$ ) gebündelt.

## 3 Wärmelehre

### 3.1 Temperatur

Wärme wurde in der zweiten Hälfte des 19. Jahrhunderts als mechanische Energie gedeutet, also als Bewegungsenergie von Atomen und Molekülen ausgedrückt durch die Temperatur. Demnach gibt es eine kleinste Temperatur, bei der die Bewegung zur Ruhe kommt:  $T = 0 \text{ K}$  oder  $T = -273,15 \text{ °C}$ .

**Celsius-Skala** (A. Celsius, 1701-1744): Schmelzpunkt von Eis  $0 \text{ °C}$ , Siedepunkt von Wasser  $100 \text{ °C}$ .

**Fahrenheit-Skala** (D. Fahrenheit, 1686-1736): Schmelzpunkt einer Mischung aus Wasser und  $\text{NH}_4\text{Cl}$   $0 \text{ °F}$ , Schmelzpunkt von Eis  $32 \text{ °F}$ , menschliche Körpertemperatur  $96 \text{ °F}$  (heute: Siedepunkt von Wasser  $212 \text{ °F}$ ).

**Kelvin-Skala** (W. Thomson, 1824-1907): absoluter Nullpunkt  $0 \text{ °K}$ , Tripelpunkt von Wasser  $273,16 \text{ °K}$ .

#### Definition und Messung der Temperatur (Thermometer) über temperaturabhängige Phänomene:

- Schmelz- und Siedepunkt von Stoffen bei bestimmten Temperaturen.
- Ausdehnung von Festkörpern, Flüssigkeiten und Gasen, meist mit zunehmender Temperatur.

Für Festkörper:  $L(T_C) = L(0) \cdot (1 + \alpha \cdot T_C)$

$L$ : Länge

$T_C$ : Temperatur in Grad Celsius

$\alpha$ : linearer Ausdehnungskoeffizient

- Änderung des elektrischen Widerstands von Leitern und Halbleitern (s. später).
- Änderung der elektrischen Kontaktspannung zwischen zwei Metallen (s. später).
- Strahlungsleistung eines Körpers, die mit der Temperatur zunimmt (s. später).

## 3.2 Wärmeausdehnung

### 3.2.1 Festkörper und Flüssigkeiten

**Lineare Ausdehnung**  $L(T_C) = L(0) \cdot (1 + \alpha \cdot T_C)$

**Volumenausdehnung**  $V(T_C) = V(0) \cdot (1 + \gamma \cdot T_C)$

$L$ : Länge

$V$ : Volumen

$T_C$ : Temperatur in Grad Celsius

$\alpha$ : linearer Ausdehnungskoeffizient

$\gamma$ : räumlicher Ausdehnungskoeffizient

Für homogene und isotrope Körper ist  $\gamma \approx 3\alpha$

Wasser weist eine **Anomalie** auf: es hat seine größte Dichte (kleinste Ausdehnung) bei ca. 4 °C; darunter dehnt es sich bis 0 °C wieder aus (um ca. 0,13%). Eis hat eine deutlich geringere Dichte (918 kg/m<sup>3</sup>) als flüssiges Wasser (1000 kg/m<sup>3</sup>), sein Volumen nimmt mit abnehmender Temperatur ab.

### 3.2.2 Gase

Während die Ausdehnung von Festkörpern und Flüssigkeiten stark nichtlinear ist (obige Gesetze sind nur in einem kleinen Temperaturbereich gute Näherungen), ist es sinnvoll, Gase auf der absoluten Temperaturskala (in K) zu betrachten. **Allgemeine Gasgleichung:**

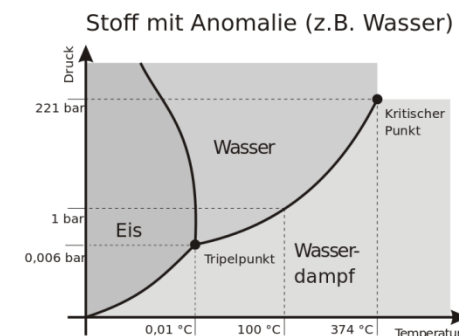
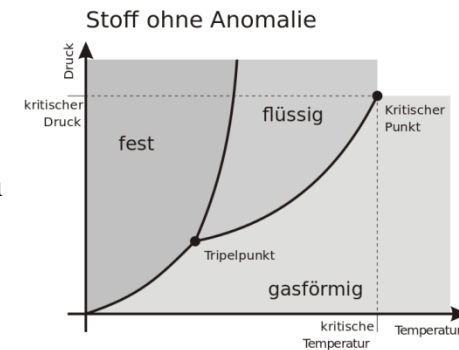
$$p \cdot V = \nu \cdot R \cdot T$$

$p$  = Druck  
 $\nu$  = Anzahl der Mole  
 $R = 8,314 \text{ J}/(\text{K} \cdot \text{mol})$  allgemeine Gaskonstante

$$p \propto \frac{1}{V} \quad (T = \text{const}) \quad \text{Boyle-Mariotte-Gesetz}$$

$$V \propto T \quad (p = \text{const}) \quad \text{Gay-Lussac-Gesetz}$$

$$p \propto T \quad (V = \text{const}) \quad \text{Gesetz von Amontou}$$



## Experiment

Wärmeausdehnung eines Messingrohrs, das von geheiztem Wasser durchflossen wird. Das Rohr ist  $L = 600$  mm lang. Die Ausdehnung änderte sich linear von 28 bis 58 °C um  $\Delta L = 0,30$  mm. Linearer Ausdehnungskoeffizient:

$$\alpha = \frac{\Delta L}{L \cdot \Delta T} = \frac{0,30 \text{ mm}}{600 \text{ mm} \cdot 30 \text{ K}} = (1,67 \pm 0,05) \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

Der dominierende Fehler ist der Ablesefehler der mm-Skala (3%). Literaturwert:

$$\alpha = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1}$$

also ein (kleiner) Widerspruch zur Messung. Es sind noch weitere systematische Fehlerquellen denkbar, z.B. könnte die Temperatur im Stab von der Wassertemperatur am Ort der Messung abweichen.



## Experiment

Modellversuch zur kinetischen Gastheorie. Eine schwingende Bodenplatte bewirkt eine ungeordnete Bewegung von Kugeln in einem Gefäß. Je stärker die Bewegung, desto höher der Impulsübertrag (Druck) auf die obere Wand, die sich anhebt.

Die Kugeln können durch ein Loch das Gefäß verlassen und landen in einem segmentierten Auffänger. Je höher die Geschwindigkeit, desto weiter fliegen die Kugeln. Durch die Segmentierung entsteht ein Histogramm der Kugelgeschwindigkeiten, das der Boltzmann-Maxwell-Verteilung ähnelt.



1 Mol ist die Menge eines Stoffes, die ebenso viele Atome/Moleküle enthält wie 12 g Kohlenstoff  $^{12}\text{C}$  (Atomare Masseneinheit in Gramm). Die Zahl der Teilchen pro Mol ist die Avogadro-Konstante:

$$N_A = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ 1/mol}$$

Mit der Teilchenzahl  $N$  im "idealen" Gas gilt

$$p \cdot V = \frac{N}{N_A} \cdot R \cdot T = N \cdot k \cdot T$$

wobei  $k$  die Boltzmann-Konstante ist

$$k = 1,381 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} = 8,617 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}$$



Ludwig Boltzmann  
1844-1906

Unter "Normalbedingungen" ( $T = 0 \text{ °C}$  und  $p = 101,3 \text{ Pa}$ ) ist das Molvolumen  $22,4 \text{ dm}^3$ .

Die Eigenschaften der Gase können durch die **kinetische Gastheorie** erklärt werden, die ab dem 18. Jh. entwickelt wurde, aber bis ins 20. Jh. umstritten war, da sie die Existenz von Atomen und Molekülen voraussetzt.

Gasteilchen bewegen sich ungeordnet und zwischen Stößen gleichförmig mit einer statistischen Geschwindigkeitsverteilung, die von der Temperatur abhängt (Maxwell-Boltzmann-Verteilung).

Mittlere Geschwindigkeit:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{8}{\pi} \frac{k \cdot T}{m}}$$

Kollisionen der Teilchen untereinander und mit der Wand des Gefäßes sind elastische Stöße. Wenn pro Sekunde  $N$  Teilchen mit Geschwindigkeit  $v_{\perp}$  senkrecht auf die Wand treffen, ist der Druck gleich dem übertragenen Impuls pro Fläche:

$$p = \frac{F}{A} = \frac{2N \cdot m \cdot v_{\perp}}{A}$$

### 3.3 Wärmemenge und spezifische Wärme

Führt man einem Körper Energie zu (z.B. mechanische Reibung, elektrische Energie), beobachtet man eine Erhöhung der Temperatur, d.h. Wärme ist eine Form von Energie. Mit der Wärmemenge steigt die Temperatur:

$$\Delta Q = c \cdot M \cdot \Delta T \quad [c] = \frac{\text{J}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

spezifische Wärmekapazität

$$[Q] = 1 \text{ J}$$

früher:  $[Q] = 1 \text{ cal} = 4,187 \text{ J}$  mechanisches Wärmeäquivalent

Für 1 Mol:  $\Delta Q = C \cdot \Delta T \quad [C] = \frac{\text{J}}{\text{mol} \cdot \text{K}}$

$$C = c \cdot M_{\text{mol}} \quad \text{molekulare Wärmekapazität}$$



Bestimmung des mechanischen Wärmeäquivalents s. Übungsblatt 6

#### 3.3.1 Molekulare Deutung der spezifischen Wärme

**Innere Energie**  $U$  = gesamte Energie der Teilchen.

Energie pro Teilchen und Freiheitsgrad (**Gleichverteilungssatz**):  $E = \frac{1}{2} k \cdot T$

Änderung der inneren Energie für ein Mol bei einer Temperaturänderung  $\Delta T$ :

$$\Delta U = f \cdot N_A \cdot \frac{1}{2} k \cdot \Delta T$$

$N_A$ : Avogadro-Konstante  
 $f$ : Zahl der Freiheitsgrade  
 $k$ : Boltzmann-Konstante

Die Zahl der Freiheitsgrade  $f$  ist die Zahl unabhängiger Möglichkeiten der Atome/Moleküle, Energie aufzunehmen, maximal:

- 3 Translationsfreiheitsgrade
- 3 Rotationsfreiheitsgrade
- 3 Vibrationsfreiheitsgrade

### 3.3.2 Spezifische Wärme von Festkörpern

Bei Schwingungen werden für jede Raumrichtung 2 Freiheitsgrade angenommen (kin. + pot. Energie):

$$\Delta Q = \Delta U = C \cdot \Delta T \quad \rightarrow \quad C = 6 \cdot N_A \cdot \frac{1}{2} k = 3R \quad R = N_A \cdot k = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{K} \cdot \text{mol}}$$

Dieses sog. **Dulong-Petit-Gesetz** (gilt nur näherungsweise; bei niedrigen Temperaturen werden nicht alle Freiheitsgrade angeregt, für tiefe Temperaturen gilt das Debye-Gesetz  $C_V \sim T^3$ ).

### 3.3.3 Spezifische Wärme von Gasen

Hierbei ist zu unterscheiden:

$C_V$  = molekulare Wärmekapazität bei konstantem Volumen

$C_p$  = molekulare Wärmekapazität bei konstantem Druck

Bei konstantem Volumen (wie oben):  $\Delta Q = \Delta U = C_V \cdot \Delta T \quad \rightarrow \quad C_V = \frac{f}{2} R$

Bei konstantem Druck:  $\Delta Q = C_V \cdot \Delta T + p \cdot \Delta V \quad \rightarrow \quad C_p = C_V + R = \frac{f+2}{2} R$

weil  $p \cdot (V + \Delta V) = R \cdot (T + \Delta T)$

$$p \cdot \Delta V = R \cdot \Delta T$$

Adiabatindex:  $\kappa = \frac{C_p}{C_V} = \frac{f+2}{f}$

Anmerkung: Beim Schmelzen und Verdampfen muss zusätzliche Energie zugeführt werden.

**Schmelzwärme**  $\lambda_S$  z.B. Eis 333 kJ/kg

**Verdampfungswärme**  $\lambda_V$  z.B. Wasser 2256 kJ/kg