Beispiel 1: Bestimmung der Erdmasse

Die Gravitationsbeschleunigung g kann leicht gemessen werden. Ist die Gravitationskonstante und der Erdradius gegeben, kann die Erdmasse berechnet werden:

$$m \cdot g = G \frac{M \cdot m}{R^2} \quad \rightarrow \quad M = \frac{g \cdot R^2}{G} = \frac{9{,}81\,\mathrm{m/s}^2 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6)^2\ \mathrm{m}^2\ \mathrm{kg\,s}^2}{6{,}67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{m}^3} = 5{,}97 \cdot 10^{24}\ \mathrm{kg}$$

Beispiel 2: Erste kosmische Geschwindigkeit v_1

Wie schnell wäre ein Satellit, der die Erde knapp über seiner Oberfläche umkreist? Luftwiderstand und Erdrotation sollen vernachlässigt werden. Hier gilt: Gravitationsbeschleunigung = Kreisbeschleunigung

$$g = \frac{v_1^2}{R} \quad \rightarrow \quad v_1 = \sqrt{g \cdot R} = \sqrt{9{,}81 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2} = 7{,}9 \cdot 10^3\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 7{,}9\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}}$$

Beispiel 3: Geostationärer Satellit

In welcher Höhe befindet sich ein Satellit, der stets über demselben Ort der Erde steht? Ansatz: Gravitationsbeschleunigung beim Radius r = Kreisbeschleunigung mit Geschwindigkeit $v = 2\pi r$ pro Tag

$$G\frac{M}{r^2} = g\frac{R^2}{r^2} = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\pi \cdot r/T)^2}{r} = \frac{4\pi^2 \cdot r}{T^2} \rightarrow r^3 = \frac{g \cdot R^2 \cdot T^2}{4\pi^2} = \frac{9{,}81\,\mathrm{m/s}^2 \cdot (6{,}37 \cdot 10^6)^2\ \mathrm{m}^2 \cdot 86400^2\ \mathrm{s}^2}{39{,}5}$$

$$r = 4{,}22 \cdot 10^7\ \mathrm{m} \approx 42.200\,\mathrm{km}$$ vom Erdmittelpunkt (Höhe ≈ 35.800 km über dem Erdboden)

Beispiel 4: Zweite kosmische Geschwindigkeit v_2

Mit welcher Geschwindigkeit muss eine Rakete abgeschossen werden,
um das Gravitationspotenzial der Erde zu überwinden?

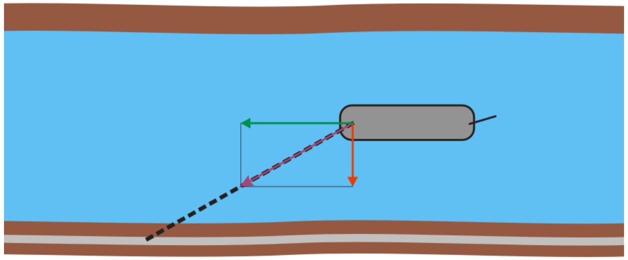
$$\frac{1}{2} m \cdot v_2^2 = m \cdot \{V(\infty) - V(R)\} = G\frac{M \cdot m}{R} \qquad \text{mit} \qquad V(\infty) = 0$$

$$v_2 = \sqrt{2G\frac{M}{R}} = \sqrt{2g \cdot R} = \sqrt{2 \cdot 9{,}81 \cdot 6{,}37 \cdot 10^6\ \mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2} = 11.180\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \approx 11{,}2\ \frac{\mathrm{km}}{\mathrm{s}} = \sqrt{2}\,v_1$$

2.1.2.7 Kombination und Zerlegung von Kräften

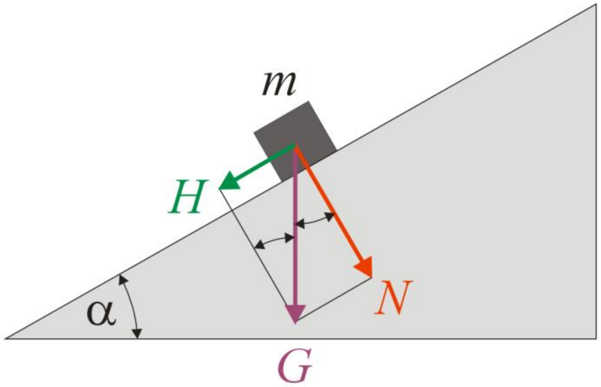
Kräfte, die am selben Punkt angreifen, addieren sich wie Vektoren. Umgekehrt kann man sich jede Kraft in Vektoren zerlegt vorstellen. Beispiele:

Treideln: Ein Boot wird mit einer Leine von Ufer aus gezogen. Durch Ruderlegen wird dafür gesorgt, dass nur die Kraftkomponente parallel zum Ufer (grün) einen Vortrieb bewirkt. Viele Wege entlang von Flüssen oder Kanälen dienten früher diesem Zweck.



Treidelpfad am Finow-Kanal

Schiefe Ebene: Die Gewichtskraft G wird in eine Komponente senkrecht zum Hang (Normalkraft *N*, rot) und eine Komponente parallel zum Hang (Hangabtriebskraft *H*, grün) zerlegt. Die Normalkraft ist für die Reibung relevant, der Hangabtrieb bewirkt, dass der Körper die Ebene hinabgleitet.



$$G = m \cdot g$$

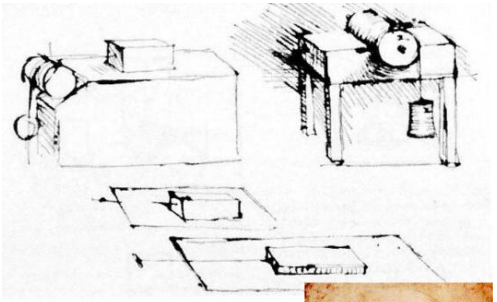
$$N = G \cdot \cos\alpha = m \cdot g \cdot \cos\alpha$$

$$H = G \cdot \sin\alpha = m \cdot g \cdot \sin\alpha$$

2.1.2.8 Reibungskraft

wird gerne vernachlässigt und kann störend sein (zusätzlicher Kraftaufwand, Wärmeentwicklung). Allerdings ist Reibung auch nützlich und eine Welt ohne sie ist kaum vorstellbar.

a) Coulomb-Reibung (trockene Reibung) geschwindigkeitsunabhängig



Haftreibung $F_H = \mu_H \cdot N$

Gleitreibung $F_G = \mu_G \cdot N$

Rollreibung $D_R = \mu_R \cdot N$

In jedem Fall ist die Normalkraft N maßgeblich. Der Haft- und Gleitreibungs-koeffizient μ_H bzw. μ_G ist dimensonslos

$[\mu_R] = 1\,\mathrm{m}$ $\mu_H > \mu_G$

Leonardo da Vinci (1452 - 1519)

Das Produkt aus Normalkraft und Rollreibungskoeffizient μ_R ist keine Kraft, sondern ein Drehmoment (Kraft mal Hebelarm, mehr dazu später).

b) Stokes-Reibung (viskose Reibung) ~ Geschwindigkeit v

in zähen Flüssigkeiten, z.B. Kugel $F_S = 6\pi \cdot \eta \cdot R \cdot v$ $[\eta] = 1 \frac{\mathrm{N\,s}}{\mathrm{m}^2}$

(R ist der Radius, η die sog. Viskosität)

c) Newtonsche Reibung ~ v^2

in weniger zähen Fluiden mit Dichte ρ z.B. Luftwiderstand:

$$F_L = \frac{1}{2} C_W \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$$

(A: Fläche, C_W: dimensionsloser Widerstandskoeffizient

Beispiel: Freier Fall

$$m \cdot a = -m \cdot g + \frac{1}{2} C_W \cdot \rho \cdot A \cdot v^2$$

Endgeschwindigkeit

$$a = 0 \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2m \cdot g}{C_W \cdot \rho \cdot A}}$$

Rekorde:
1960 Joseph Kittinger
Sprung aus 31 km Höhe: 988 km/h
2012 Felix Baumgartner
Sprung aus 39 km Höhe: 1357 km/h
2014 Alan Eustace
Sprung aus 41 km Höhe: 1323 km/h

2.1.3 Drehimpuls und Drehmoment

Der **Drehimpuls** L wird später als Erhaltungsgröße bei der Rotation ausgedehnter Körper eine wichtige Rolle spielen (z.B. beim Kreisel), er ist auch für Massenpunkte definiert und sinnvoll (z.B. Himmelmechanik):

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = m(\vec{r} \times \vec{v})$$

$\vec{r}$ ist der Ortsvektor von einem Punkt 0 aus

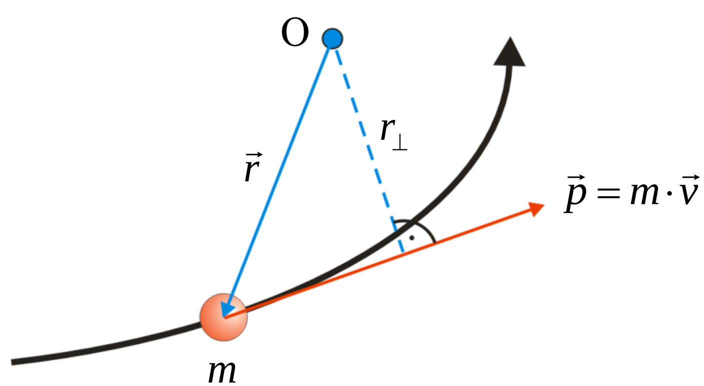
$\vec{p}$ ist der Impuls

Kreuzprodukt: $$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r_y \cdot p_z - r_z \cdot p_y \\ r_z \cdot p_x - r_x \cdot p_z \\ r_x \cdot p_y - r_y \cdot p_x \end{pmatrix}$$

$$\vec{L} \perp \vec{r} \qquad \vec{L} \perp \vec{p} \qquad [L] = 1\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

Der Drehimpulsvektor steht senkrecht auf dem Orts- und Impulsvektor. Sein Betrag ergibt sich aus dem Betrag des Impulses und dem Abstand $r_\perp$ senkrecht zur Impulsrichtung. Dieser Abstand wird manchmal "Stoßparameter" genannt.

$$\left|\vec{L}\right| = \vec{r} \times \vec{p} = r_\perp \cdot \left|\vec{p}\right|$$



Beispiel: Kreisbewegung mit Radius R, Betrag L konstant

$$\left|\vec{L}\right| = R \cdot \left|\vec{p}\right| = m \cdot R \cdot v = m \cdot R^2 \cdot \omega \qquad \omega = \frac{v}{R}$$

Die zeitliche Änderung (Ableitung) des Drehimpulses ist das **Drehmoment** D:

$$\dot{\vec{L}} = \vec{D} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \vec{F} = \dot{\vec{p}} \qquad [D] = 1\frac{\text{kg m}^2}{\text{s}^2} = 1\,\text{N} \cdot \text{m}$$

Drehmoment und Drehimpuls spielen also bei Drehbewegungen eine ähnliche Rolle wie Kraft und Impuls. Bei Bewegungen in Zentralkraftfeldern (Gravitation einer Punktmasse, elektrisches Feld einer Punktladung) ist das Drehmoment 0 und der Drehimpuls ist zeitlich konstant:

$$\vec{F} \parallel \vec{r} \quad \rightarrow \quad \vec{D} = 0 \quad \rightarrow \quad \vec{L} = \text{const.}$$

Andere Interpretation des Drehmoments *D*

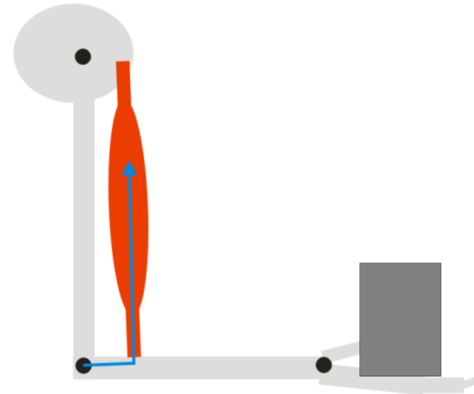
(s. auch später, Kapitel über starre Körper):

$$\vec{D} = \vec{r} \times \vec{F} \qquad \vec{F} \perp \vec{r} \quad \rightarrow \quad D = r \cdot F$$

Drehmoment = Produkt aus Kraft und Hebelarm.
Hebelgesetz: Befindet sich der Hebel im Gleichgewicht, so ist die Summe aller Drehmomente null (sonst würde sich der Drehimpuls ändern, d.h. eine Drehbewegung würde einsetzen):

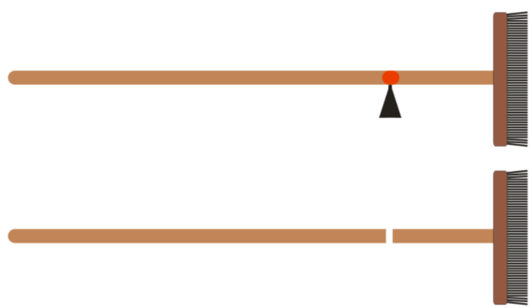
$$r_1 \cdot F_1 = r_2 \cdot F_2 \quad \rightarrow \quad F_2 = F_1 \frac{r_1}{r_2}$$

Anwendungen: größere Kraft, kleinerer Weg (z.B. Werkzeuge)
größerer Weg, kleinere Kraft (z.B. Rudern)



Beispiel: Schulter, Oberarm, Unterarm und Hand. Das Drehmoment ist gegeben durch die Kraft des Bizeps und den Abstand zwischen Ellenbogengelenk und Ansatzpunkt des Muskels an der Speiche (ca. 5 cm)

Beispiel:
Hebelwirkung von Werkzeugen wie Schraubenschlüssel oder Zange



Experiment

Der Schwerpunkt eines Besens wird bestimmt: Der Besen dreht sich nicht, wenn er unter seinem Schwerpunkt unterstützt wird, weil sich die Drehmomente beidseitig des Schwerpunkts aufheben. Nun wird der Besen an seinem Schwerpunkt zersägt. Welche Hälfte ist schwerer, Stiel oder Bürste? Laut mehrheitlichem Entscheid sind beide Hälften gleich schwer. Eine Betrachtung der Drehmomente ergibt jedoch: die Bürste ist schwerer als der Stiel, aber ihr Hebelarm ist kürzer als der des Stiels.

Weitere Anmerkungen zur Drehbewegung:

Kinematik der gleichförmigen Kreisbewegung: $a_z = \frac{v^2}{R}$

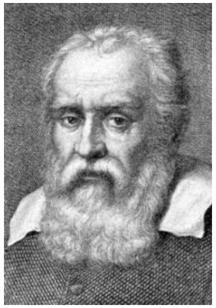
Die Beschleunigung zum Kreismittelpunkt wird auch
Zentripetalbeschleunigung genannt (lat. *petere* = streben).
Auf eine Masse *m* wird die zum Kreismittelpunkt gerichtete **Zentripetalkraft** ausgeübt:

$$F_z = m \cdot a_z = \frac{m \cdot v^2}{R}$$

Dagegen ist die nach außen gerichtete **Zentrifugalkraft** eine Scheinkraft, die in einem beschleunigten Bezugssystem (s. später) auf einen Körper ausgeübt wird, da sich der Körper gemäß dem 1. Newtonschen Gesetz geradlinig gleichförmig bewegen "will".

2.1.4 Planetenbewegung (Kepler)

Der Lauf der Planeten am Himmel wird leichter verständlich, wenn annimmt, dass alle Planeten um die Sonne kreisen. Eine gute Übereinstimmung erhält man erst unter der Annahme von Ellipsenbahnen.
Auf der Grundlage u.a. von Tycho Brahes Beobachtungen, fand Johannes Kepler zwischen 1609 und 1618 die nach ihm benannten Gesetze.



Galileo Galilei (1564 - 1642)

Nicolaus Copernicus (1473 - 1543)

Tycho Brahe (1546 - 1601)

Johannes Kepler (1571 - 1630)

Keplersche Gesetze

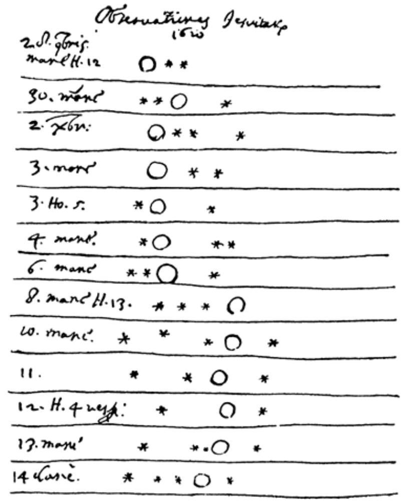
1. Keplersches Gesetz: Planeten bewegen sich auf Ellipsen, in einem der Brennpunkte steht die Sonne (ergibt sich aus dem Gravitationsgesetz, das Newton 1687 formulierte). Abstand von der Sonne:

$$r = \frac{\Pi}{1-\varepsilon \cdot \cos\varphi} \qquad \Pi \equiv \frac{L^2}{G \cdot M \cdot m^2}$$

Kegelschnitte:
- $\varepsilon = 0$ Kreis
- $1 > \varepsilon > 0$ Ellipse
- $\varepsilon = 1$ Parabel
- $\varepsilon > 1$ Hyperbel

für Kreisbahnen $\leftrightarrow$ Gravitationskraft = Zentripetalkraft

$$r = \frac{L^2}{G \cdot M \cdot m^2} = \frac{m^2 \cdot v^2 \cdot r^2}{G \cdot M \cdot m^2} \quad \leftrightarrow \quad G\frac{M \cdot m}{r^2} = m\frac{v^2}{r} \qquad (*)$$

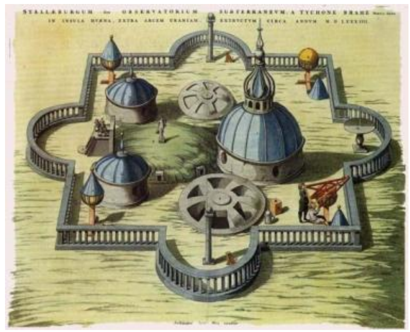


Galileis Aufzeichnungen über die Positionen der Jupitermonde

2. Keplersches Gesetz: Der Vektor Sonne-Planet überstreicht in gleichen Zeiten gleiche Flächen (ergibt sich aus dem Drehimpulserhaltungssatz).

$$\dot{\vec{L}} = 0 = m\frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{v}\right)$$

In der Klammer steht die pro Zeit überstrichene Fläche, weil der Betrag des Kreuzprodukts die von den Vektoren aufgespannte Fläche ist.



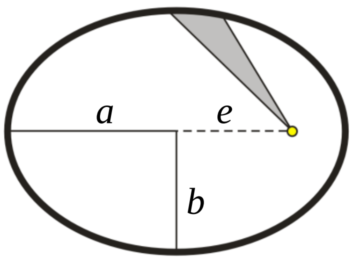
Brahes Observatorium auf der (damals) dänischen Insel Hven

3. Keplersches Gesetz: Die Quadrate der Umlaufzeiten der Planeten verhalten sich wie die dritten Potenzen der großen Halbachsen.

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{const.} \qquad \text{für Kreisbahnen: } \frac{1}{\mathrm{r}} \propto v^2 \quad \text{wie oben } (*)$$

Ein paar Begriffe:

a = große Halbachse der Ellipse
b = kleine Halbachse der Ellipse
e = Exzentrizität
ε = "numerische" Exzentrizität $\qquad \varepsilon = e/a = \sqrt{a^2 - b^2}/a$
Aphel = sonnenfernster Punkt
Perihel = sonnennächster Punkt



Das effektive Potenzial

Die kinetische Energie eines Planeten kann in einen Radial- und einen Winkelanteil aufgeteilt werden. Der Winkelanteil (azimutaler Anteil) wird hier durch den Drehimpuls ausgedrückt:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m\left(v_r^2 + v_\varphi^2\right) = \frac{1}{2} m \cdot \dot{r}^2 + \frac{L^2}{2m \cdot r^2} \qquad \leftarrow \qquad L = m \cdot r \cdot v_\varphi$$

Energiesatz mit konstanter Gesamtenergie E:

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = \underbrace{-G\frac{M \cdot m}{r} + \frac{L^2}{2m \cdot r^2}}_{\text{effektives Potenzial}} + \frac{1}{2} m \cdot \dot{r}^2 = E_{\text{eff}} + \frac{1}{2} m \cdot \dot{r}^2$$

Die Vorstellung einer Potenzialmulde, in der ein Teilchen (z.B. ein Planet) "gefangen" ist, ist in der Physik aufgrund ihrer Anschaulichkeit sehr beliebt. In diesem Fall bildet das attraktive Potenzial einer Zentralkraft (z.B. Gravitation) zusammen mit der abstoßenden Drehimpuls"barriere" eine Mulde.

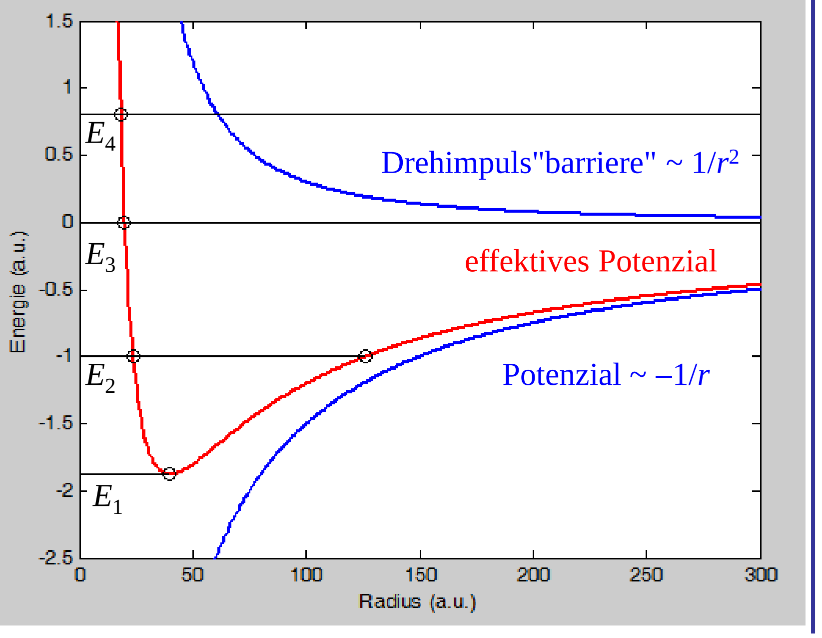
Verschiedene Fälle:

E_1: nur azimutale Bewegung, nur ein Radius möglich (Kreisbahn)

$E_2 < 0$: azimutale und radiale kinetische Energie, Radius zwischen zwei Werten (Ellipsenbahn)

$E_3 = 0$: radiale Energie reicht gerade für eine ungebundene Bewegung aus (Parabelbahn)

$E_4 > 0$: auch im Unendlichen noch radiale kinetische Energie, ungebundene Bewegung (Hyperbel)



2.2 Systeme von Massenpunkten

Mit dem Gravitationsgesetz und der Planetenbewegung haben wir eigentlich schon Systeme von zwei Massenpunkten betrachtet, die Kräfte aufeinander ausüben. Allerdings wurde eine Masse (Sonne) immer als ortsfest angenommen, was nicht ganz richtig ist.

2.2.1 Grundbegriffe

Schwerpunkt von zwei gleichen Massen *m*:

$$\vec{r}_S = \frac{1}{2}\left(\vec{r}_1 + \vec{r}_2\right) = \frac{m \cdot \vec{r}_1 + m \cdot \vec{r}_2}{m + m}$$

für jede Dimension: arithmetisches Mittel

Schwerpunkt von zwei verschiedenen Massen $m_{1/2}$:

$$\vec{r}_S = \frac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_1 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_1}$$

mit den Massen gewichteter Mittelwert

Schwerpunkt mehrerer Massen m_i:

$$\vec{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i} = \frac{1}{M} \cdot \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \vec{r}_i \qquad M = \sum_{i=1}^{N} m_i$$

Die Summe aller Impulse ist konstant:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i = M \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \cdot \dot{\vec{r}}_i}{M} = M \cdot \dot{\vec{r}}_S$$

Der Schwerpunkt bewegt sich so, als ob alle Massen in ihm vereinigt wären und die äußeren Kräfte an ihm angreifen. Wenn z.B. die Summe der äußeren Kräfte null ist, bewegt sich der Schwerpunkt gleichförmig geradlinig (Impulserhaltung).

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = M \cdot \ddot{\vec{r}}_S$$

Im **Schwerpunktssystem** (Nullpunkt des Systems ist der Schwerpunkt) ist die Summe aller Impulse null. Umrechung von Ortsvektoren r_{iS} im Schwerpunktssystem in Ortsvektoren r_i eines anderen Systems:

$$\vec{r}_i = \vec{r}_{iS} + \vec{r}_S$$

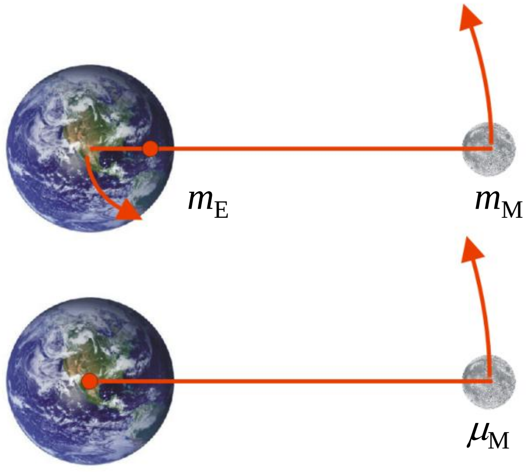
Beispiel: Erde und Mond, der Schwerpunkt ist ca. 4500 km vom Erdmittelpunkt entfernt

$$r_S = \frac{0\,\text{km} \cdot 597{,}4 \cdot 10^{22}\,\text{kg} + 370.000\,\text{km} \cdot 7{,}3 \cdot 10^{22}\,\text{kg}}{604{,}7 \cdot 10^{22}\,\text{kg}} = 4467\,\text{km}$$

$$\vec{a}_1 = \frac{\vec{F}_{12}}{m_1} \qquad \vec{a}_2 = \frac{\vec{F}_{21}}{m_2} = -\frac{\vec{F}_{12}}{m_2} \qquad \rightarrow \qquad \vec{a}_1 - \vec{a}_2 = \left(\frac{1}{m_2} + \frac{1}{m_1}\right) \cdot \vec{F}_{12} = \frac{m_1 + m_2}{m_1 \cdot m_2} \cdot \vec{F}_{12} = \frac{1}{\mu} \cdot \vec{F}_{12}$$

Statt der Bewegung beider Körper um den gemeinsamen Schwerpunkt kann man die Bewegung der leichteren Körpers (z.B. Mond) um den Schwerpunkt des schwereren Körpers (z.B. Erde) betrachten, wenn man statt der leichteren Masse die "**reduzierte Masse**" μ verwendet, z.B. Mond:

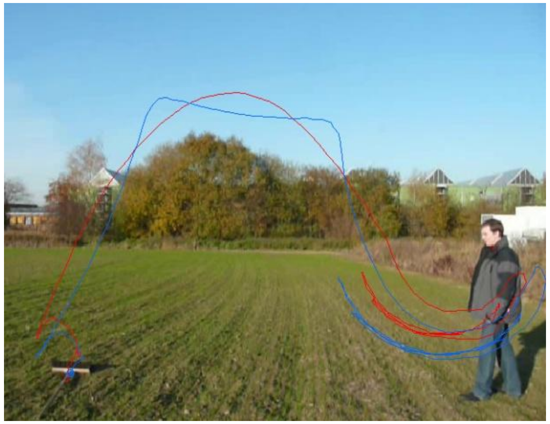
$$\mu_\text{M} = \frac{m_\text{E} \cdot m_\text{M}}{m_\text{E} + m_M} = \frac{4391 \cdot 10^{44}\,\text{kg}^2}{604{,}7 \cdot 10^{22}\,\text{kg}} = 7{,}26 \cdot 10^{22}\,\text{kg} = 0{,}988 \cdot m_\text{M}$$



Beispiel: Proton und Elektron im Bohrschen Atommodell

$$m_\text{p} = 1{,}67 \cdot 10^{-27}\,\text{kg} \qquad m_\text{e} = 9{,}11 \cdot 10^{-31}\,\text{kg}$$

$$\mu_\text{e} = 0{,}9995 \cdot m_\text{e}$$



Beispiel zur Bewegung des Schwerpunkts eines starren Körpers:

In einem Video (DELTA Productions) wird ein Besen wird geworfen. Sein Schwerpunkt beschreibt eine Wurfparabel (rot), während andere Teile des Besens, z.B. die Bürste, eine kompliziertere Bewegung ausführen (blau).

2.2.2 Stoßprozesse

Ein Stoß ist eine kurzzeitige Wechselwirkung zwischen zwei Körpern z.B. Autos, Billardkugeln, etc. Dabei müssen sich die Körper nicht notwendigerweise berühren, z.B. geladene Teilchen (Elektronen, Protonen, Atomkerne etc.) oder Massen (Satelliten, Planeten, Galaxien etc.). Man unterscheidet je nach Änderung Q der "inneren Energie":

$Q = 0$: **elastische Stöße**; die Summe der kinetischen Energien bleibt erhalten

$Q < 0$: **inelastische Stöße**; die Summe der kinetischen Energien nimmt ab (z.B. durch Reibung, Wärme...)

$Q > 0$: **superelastische Stöße**; die Summe der kinetischen Energien nimmt zu (ein Körper gibt Energie ab)

Bei **reaktiven Stößen** können sich auch die Massen der Stoßpartner ändern, z.B. chemische Reaktion

2.2.2.1 Elastische Stöße

Beim elastischen Stoß gilt der **Impulserhaltungssatz** und der **Energieerhaltungssatz**

ohne Strich: vor dem Stoß
mit Strich: nach dem Stoß

$$\vec{p}_1' + \vec{p}_2' = \vec{p}_1 + \vec{p}_2$$

$$\frac{1}{2} m_1 \cdot v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2'^2 = \frac{1}{2} m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2^2$$

Beispiel: zentraler Stoß (Bewegung entlang einer Achse)

Impulssatz $$m_1 \cdot v_1' + m_2 \cdot v_2' = m_1 \cdot v_1 + m_2 \cdot v \quad \rightarrow \quad m_1 \cdot (v_1' - v_1) = -m_2 \cdot (v_2' - v_2) \qquad \text{(I)}$$

Energiesatz $$m_1 \cdot (v_1'^2 - v_1^2) = m_1 \cdot (v_1' + v_1) \cdot (v_1' - v_1) = -m_2 \cdot (v_2' + v_2) \cdot (v_2' - v_2) \qquad \text{(II)}$$

(II) durch (I) $$v_1' + v_1 = v_2' + v_2 \quad \rightarrow \quad v_2' = v_1' + v_1 - v_2$$

in (I) eingesetzt $$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2$$

und ein analoger Ausdruck für v'_2 (Index 1 und 2 vertauscht)

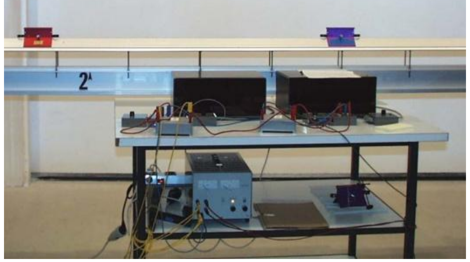
$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v_2 \quad \text{und} \quad v_2' = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

Spezialfall: m_2 ruht vor dem Stoß: $v_2 = 0$, v_1 nach "rechts" $\quad v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \qquad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$

$m_1 > m_2$: $\quad 0 < v'_1 < v_1$ langsam nach rechts $\quad 0 < v_1 < v'_2$ schnell nach rechts

$m_1 < m_2$: $\quad v_1 < v'_1 < 0$ langsam nach links $\quad 0 < v'_2 < v_1$ langsam nach rechts

$m_1 = m_2$: $\quad v'_1 = 0$ bleibt stehen $\quad v'_2 = v_1$ mit v_1 nach rechts


vgl. Versuche mit der Luftkissenschiene

Impulsübertrag $\quad m_2 \cdot v_2' = m_2 \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = 2 \cdot \mu \cdot v_1$

Energieübertrag $\quad \frac{1}{2} m_2 \cdot v_2'^2 = \frac{1}{2} m_2 \frac{4m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v_1^2 = 4 \frac{m_1 \cdot m_2}{(m_1 + m_2)^2} E_1 = 4 \frac{\mu^2}{m_1 \cdot m_2} E_1$

2.2.2.2 Inelastische Stöße

Beim inelastischen Stoß gilt der **Impulserhaltungssatz**, nicht aber der **Energieerhaltungssatz**. Nach einem vollkommen inelastischen Stoß bewegen sich beide Stoßpartner mit derselben Geschwindigkeit.

Spezialfall: zentraler inelastischer Stoß, m_2 ruht vor dem Stoß: $v_2 = 0$, v_1 nach "rechts"

$$(m_1 + m_2) \cdot v'_{12} = m_1 \cdot v_1 \quad \rightarrow \quad v'_{12} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

$$E' = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\frac{m_1^2}{(m_1 + m_2)^2} v_1^2 = \frac{1}{2}\frac{m_1^2}{m_1 + m_2} v_1^2$$

z.B. zwei gleiche Massen

$$m_1 = m_2 = m \quad \rightarrow \quad E' = \frac{1}{4} m \cdot v_1^2 = \frac{1}{2} E$$

Energieverlust $\quad Q = -\frac{1}{2} E$

Nicht-zentrale elastische Stöße

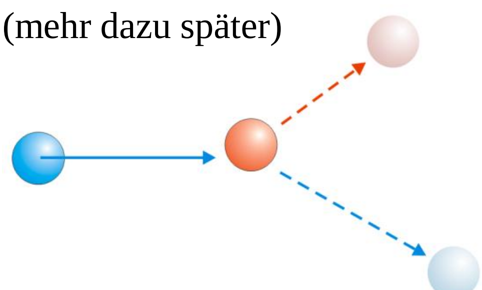
erfordern eine aufwändigere Rechnung und werden hier nicht behandelt. Sie sind trotzdem wichtig. Klassische Beispiele sind:

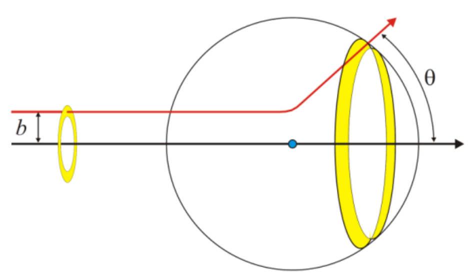
- Stöße von Billardkugeln

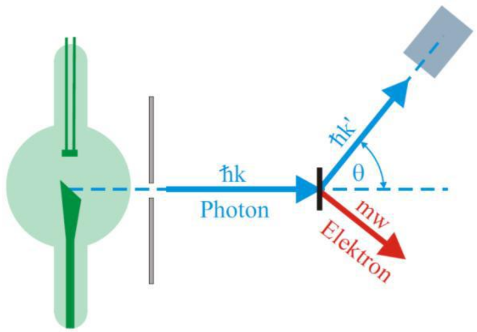
- Stöße von α-Teilchen (Heliumkerne) mit schweren Atomkernen (Rutherford, um 1911)

- Stöße zwischen Photonen (Lichtteilchen) und Elektronen, sog. Compton-Streuung

(mehr dazu später)







2.3 Der ausgedehnte starre Körper

"Starre" Körper sind solche, die sich nicht verformen, d.h. der Abstand zwischen zwei Volumenelementen des Körpers ist zeitlich konstant. Während man bei einem System von Massenpunkten über alle Punkte summiert, muss man beim ausgedehnten Körper über alle infinitesimalen Volumenelemente integrieren:

$$V = \lim_{\substack{\Delta V_i \to 0 \\ N \to \infty}} \sum_{i=1}^{N} \Delta V_i = \int_V dV \qquad M = \int_V dm = \int_V \rho dV$$

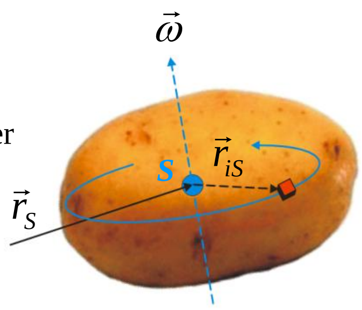
ρ ist die Dichte = Masse pro Volumeneinheit

$$\vec{r}_S = \frac{1}{M} \int_V \vec{r} \cdot \rho_i dV$$ für homogene Körper vereinfacht: $$\vec{r}_S = \frac{1}{V} \int_V \vec{r} \cdot dV$$

Die Integration erfolgt über alle Koordinaten, z.B. kartesische oder (bei Bedarf) Kugelkoordinaten:

$$V = \int_V dV = \int_{x=x_1}^{x_2} \int_{y=y_1}^{y_2} \int_{z=z_1}^{z_2} dzdydx \quad \text{oder} \quad \int_{r=0}^{R} \int_{\theta=0}^{\pi} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r^2 \sin\theta \, d\theta dr d\varphi$$

Das kann im Einzelfall kompliziert werden, aber im folgenden werden nur einfach geformte Körper betrachtet, z.B. Zylinder, Hohlzylinder, Kugeln etc.



2.3.1 Bewegung eines starren Körpers

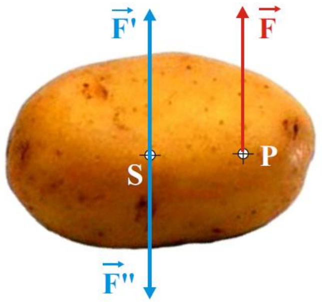
Relativbewegung des Elements i zum Schwerpunkt $\vec{r}_{iS} = \vec{r}_i - \vec{r}_S \qquad \frac{d\vec{r}_{iS}}{dt} = \vec{v}_{iS} = \vec{v}_i - \vec{v}_S$

Abstände sind zeitlich konstant: $\frac{d}{dt}\vec{r}_{iS}^{\,2} = 2\vec{r}_{iS} \cdot \vec{v}_{iS} = 0$ d.h. $\vec{r}_{iS} \perp \vec{v}_{iS}$

Die Bewegung relativ zum Schwerpunkt ist immer eine Drehbewegung: $\vec{v}_{iS} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{iS}$

$$\vec{v}_i = \vec{v}_S + \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{iS}\right)$$

Hier ist die Winkelgeschwindigkeit ω ein Vektor. Die Länge gibt die Kreisfrequenz, die Richtung die Drehachse an (rechtshändig: Daumen in Richtung des Vektors)



Sechs Freiheitsgrade: Translation in 3 Richtungen, Rotation um 3 Achsen

Die Angabe einer Kraft F erfordert bei einem ausgedehnten Körper auch die Angabe eines Angriffspunkts P. Die Einführung zweier entgegengesetzt gleicher Kräfte $F'=F$ und F'', die am Schwerpunkt S angreifen, ändern an der Bewegung nichts. Damit:

F' bewirkt eine Beschleunigung → Translation
F'' und F bewirken zusammen ein Drehmoment bzgl. S → Rotation

$$\vec{D}_S = \vec{r}_{iS} \times \vec{F} \qquad [D] = 1\,\mathrm{N\,m} \qquad \text{(Hebelarm x Kraft)}$$

2.3.2 Rotationsenergie und Trägheitsmoment

Kinetische Energie bei einer Rotation mit Winkelgeschwindigkeit ω

Masseelement $$E_i = \frac{1}{2}\Delta m_i \cdot v_i^2 = \frac{\omega^2}{2} r_{i\perp}^2 \cdot \Delta m_i \qquad v_i = \omega \cdot r_{i\perp} \qquad \left(r_{i\perp}\ \text{senkrecht zur Drehachse}\right)$$

gesamter Körper $$E_{rot} = \frac{\omega^2}{2}\int_V r_\perp^2 \cdot dm = \frac{\omega^2}{2}\int_V r_\perp^2 \cdot \rho \cdot dV$$

Trägheitsmoment I $$E_{rot} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 \qquad \text{mit} \qquad I = \int_V r_\perp^2 \cdot dm = \int_V r_\perp^2 \cdot \rho \cdot dV$$

Drehimpuls für ein Massenelement $$\vec{L}_i = r_{i\perp} \cdot \Delta m_i \cdot v_i \cdot \vec{e}_\omega = r_{i\perp}^2 \cdot \Delta m_i \cdot \vec{\omega}$$

Drehimpuls des gesamten Körpers $$\vec{L} = \int_V r_\perp^2 \cdot dm \cdot \vec{\omega} = I \cdot \vec{\omega} \qquad E_{rot} = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2 = \frac{L^2}{2I}$$

Zeitl. Änderung des Drehimpulses = Drehmoment $$\vec{D} = I \cdot \dot{\vec{\omega}}$$

Experiment zur Drehimpulserhaltung

Eine Person sitzt auf einem rotierenden Stuhl mit Hanteln an den ausgestreckten Armen. Wenn die Person die Arme anwinkelt, verkleinert sich das sog. Trägheitsmoment. Es gilt (siehe nächste Vorlesung):

Drehimpuls L = Trägheitsmoment I × Kreisfrequenz ω (analog zu Impuls = Masse × Geschwindigkeit)

Die Rotationsfrequenz erhöht sich deutlich, wenn die Person auf dem Drehstuhl die Arme anwinkelt.

Experimente zum Kreisel

(1) Ein kleiner Kreisel wird mit Druckluft in schnelle Rotation versetzt. Wenn er nur einseitig unterstützt wird, z.B. ein Ende der Achse an einem Faden hängt (s. Bild), so dreht sich das andere Ende der Achse horizontal im Kreis, statt nach unten zu fallen.

(2) Ein Zylinder, der einen Kreisel mit horizontaler Achse enthält, rollt eine schmale gekrümmte Schiene entlang, ohne herunter zu fallen.

In beiden Fällen gilt: Wenn der Kreisel aufgrund der Schwerkraft nach unten zu kippen droht, wirkt ein Drehmoment $\vec{D} = \vec{r} \times m \cdot \vec{g} = \dot{\vec{L}}$

das einer Änderung des Drehimpulses entspricht. Diese Änderung ist senkrecht zur Schwerkraft ($m \cdot g$) und senkrecht zum Ortsvektor r vom Punkt, an dem die Achse unterstützt wird, zum Schwerpunkt des Kreisels. Es ist also eine Änderung der Richtung des Drehimpulses und damit der Rotationsachse. Diese Bewegung wird "Präzession" genannt und ergibt sich formal aus dem Kreuzprodukt in obiger Formel. Eine "anschauliche" Deutung ist etwas schwieriger (z.B. mithilfe der noch nicht behandelten Corioliskraft).