Unabhängige Überlagerung von Bewegungen

b) Eine gleichförmige und eine gleichmäßig beschleunigte Bewegung (typisches Beispiel: Wurf)

Beispiel 1: Gleichförmige und beschleunigte Bewegung entlang derselben Koordinate:
Eine Kapsel wird im Bremer Fallturm in der Zeit T auf eine Höhe von H = 110 m katapultiert

$$v(t) = v(0) - g \cdot t \qquad h(t) = v(0) \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2$$

$$0 = v(0) - g \cdot T \quad \rightarrow \quad T = \frac{v(0)}{g} \qquad H = v(0)\frac{v(0)}{g} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{v^2(0)}{g^2} = \frac{1}{2}\frac{v^2(0)}{g}$$

$$v(0) = \sqrt{2g \cdot H} \qquad T = \sqrt{\frac{2H}{g}} = 4{,}74\,\mathrm{s}$$

entspricht zeitumgekehrt der Fallbewegung aus 110 m Höhe

Beispiel 2: Gleichförmige und beschleunigte Bewegung entlang verschiedener Koordinaten:
Waagerechter Wurf z.B. Wasserstrahl

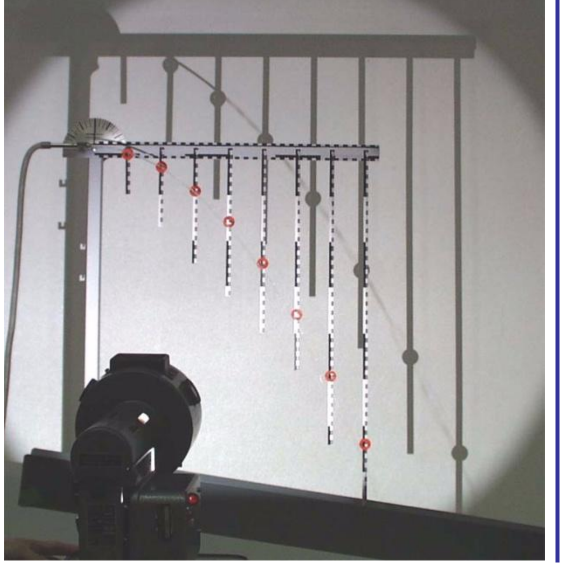
$$v_x(t) = v_0 \qquad x(t) = v_0 \cdot t \quad \rightarrow \quad t = \frac{x(t)}{v_0}$$

$$v_y(t) = -g \cdot t \qquad y(t) = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 = -\frac{g}{2v_0^2} x^2(t)$$

nach unten geöffnete Parabel mit Scheitel bei $x = y = 0$ (Ort der Düse) und der x-Anfangsgeschwindigkeit als freiem Parameter.

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \\ -g \cdot t \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot t \\ -\frac{1}{2} g \cdot t^2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

(vektorielle Schreibweise)



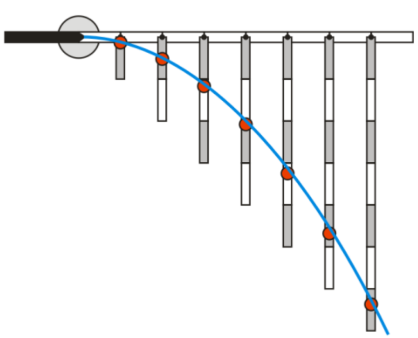
Beispiel 2: Gleichförmige und beschleunigte Bewegungen entlang verschiedener Koordinaten:
Schiefer Wurf z.B. Wasserstrahl

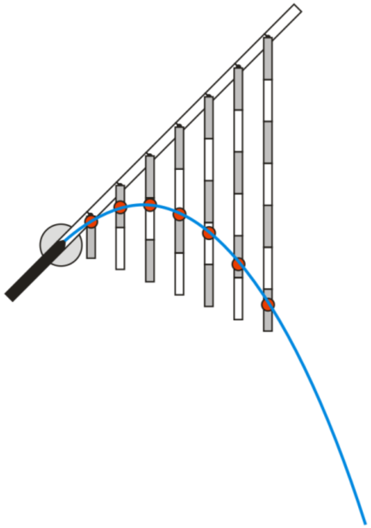
Vektorielle Schreibweise: $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_x(0) \\ -g \cdot t + v_y(0) \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_x(0) \cdot t \\ -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + v_y(0) \cdot t \\ 0 \end{pmatrix}$

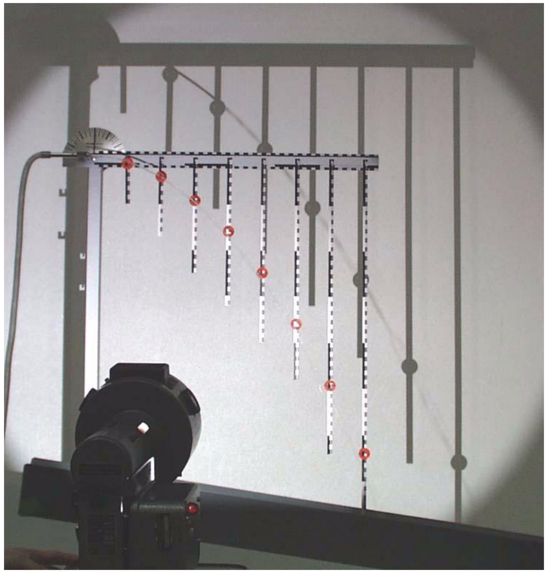
Die Wurfparabel sieht jetzt anders aus:

$$x = v_x \cdot t \quad \rightarrow \quad t = \frac{x}{v_x} \quad \rightarrow \quad y = -\frac{g}{2v_x^2} x^2 + \frac{v_y}{v_x} x \qquad \text{mit} \qquad v_0 = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \qquad \begin{aligned} v_x &= v_0 \cdot \cos\alpha \\ v_y &= v_0 \cdot \sin\alpha \end{aligned}$$

Der Scheitel der Parabel ist nicht mehr bei $x = y = 0$ (Ort der Düse) und die nach unten geöffnete Parabel wird "enger" (wenn v_x kleiner wird, wird der Faktor im x^2 -Term größer).







Gleichförmige Kreisbewegung (konstante Winkelgeschwindigkeit)

Winkel in Bogenmaß $\alpha = s / R$ = Bogenlänge / Radius $[\alpha]$ = 1 rad

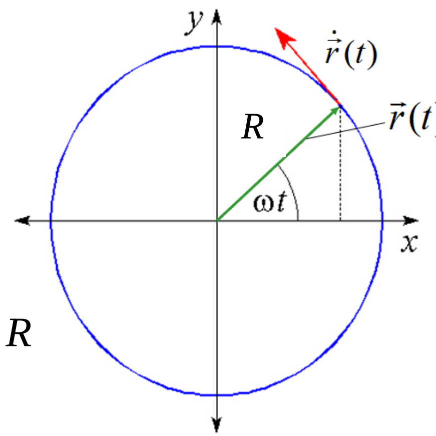
Winkelgeschwindigkeit $\omega = v / R$ = Geschwindigkeit / Radius $[\omega]$ = 1 rad / s

$$s = v \cdot t \qquad \alpha = \omega \cdot t$$

$$\vec{r}(t) = R \cdot \begin{pmatrix} \cos(\omega \cdot t) \\ \sin(\omega \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}(t) = \dot{\vec{r}}(t) = R \cdot \omega \cdot \begin{pmatrix} -\sin(\omega \cdot t) \\ \cos(\omega \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{a}(t) = \dot{\vec{v}}(t) = R \cdot \omega^2 \cdot \begin{pmatrix} -\cos(\omega \cdot t) \\ -\sin(\omega \cdot t) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}(t) = -\omega^2 \cdot \vec{r}(t) = -\frac{v^2}{R^2}\vec{r}(t) \qquad |\vec{a}(t)| = \frac{v^2}{R^2}|\vec{r}(t)| \quad \rightarrow \quad a = \frac{v^2}{R} = \omega^2 \cdot R$$

Die Beschleunigung ist stets zum Kreismittelpunkt und damit senkrecht zur Geschwindigkeit gerichtet. Ihr Betrag ist konstant.



$$|\vec{r}(t)| = R$$

$$\omega = \frac{v}{R} = 2\pi \frac{v}{2\pi \cdot R} = \frac{2\pi}{T} = 2\pi \cdot f$$

Die Winkelgeschwindigkeit heißt auch Kreisfrequenz. Hier ist f die Frequenz der Kreisbewegung (Umläufe pro Zeiteinheit) und T ist die Umlaufszeit.

2.1.2 Dynamik von Massepunkten
2.1.2.1 Newtonsche Axiome (Gesetze)

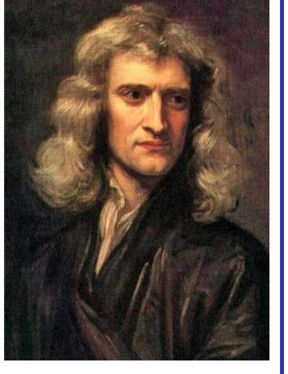
René Descartes
(1596 - 1650)

Die Dynamik beschreibt Kräfte als Ursache der Bewegung von Körpern:
- ohne äußere Kräfte ist die Bewegung gleichförmig, Betrag und Richtung der Geschwindigkeit ändern sich nicht
- eine Änderung der Geschwindigkeit (Beschleunigung) erfordert eine **Kraft *F***, Körper haben eine (träge) **Masse *m***, mit der sie sich einer Änderung ihres Bewegungszustands "widersetzen". Experimente zeigen:

$$F \propto m \quad F \propto a \quad \rightarrow \quad F = m \cdot a \qquad [F] = 1\,\mathrm{kg} \cdot \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 1\,\mathrm{N} \ \ (\text{Newton})$$

Hier wurde die Einheit der Kraft so gewählt, dass kein Proportionalitätsfaktor erforderlich ist.
Die Kraft ist eine gerichtete Größe in Richtung der Beschleunigung, in Vektorenschreibweise:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$



Sir Isaac Newton
(1643 - 1727)

1. Newtonsches Axiom: Ein Körper in Ruhe oder bewegt sich gleichförmig geradlinig, wenn keine Kräfte aus ihn einwirken (gilt nur in einem sog. Inertialsystem).

„Corpus omne perseverare in statu suo quiescendi vel movendi uniformiter in directum, nisi quatenus illud a viribus impressis cogitur statum suum mutare."

2. Newtonsches Axiom: Die Änderung der Bewegung (Beschleunigung) ist der einwirkenden Kraft proportional und erfolgt in Richtung der Kraft.

„Mutationem motus proportionalem esse vi motrici impressae, et fieri secundum lineam rectam qua vis illa imprimitur."

3. Newtonsches Axiom: Kräfte treten immer paaweise auf: Übt Körper A auf Körper B eine Kraft aus, so übt B auf A eine gleich große, aber entgegengerichtete Kraft aus ("actio = reactio").

$$\vec{F}_{\mathrm{AB}} = -\vec{F}_{\mathrm{BA}}$$

„Actioni contrariam semper et aequalem esse reactionem: sive corporum duorum actiones in se mutuo semper esse aequales et in partes contrarias dirigi."

Beispiele für "actio = reactio"

1) Wenn der Dozent eine Kreide fallen lässt, wird sie durch die Gravitationskraft nach unten beschleunigt. Gleichzeitig wird die Erde mit der gleichen Kraft nach oben beschleunigt (was man aufgrund der großen Masse der Erde nicht spürt).

2) Zwei ruhende Schlitten auf einer Luftkissenschiene stoßen sich gegenseitig mit Blattfedern ab. Haben die Schlitten gleiche Masse, entfernen sie sich mit entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit. Haben sie verschiedene Masse, ist die Geschwindigkeit umgekehrt proportional zur Masse, d.h.

a) Das Produkt aus Masse und Geschwindigkeit ist für beide Schlitten gleich: $m \cdot \vec{v} = \text{const.}$

b) Der gemeinsame Schwerpunkt (gewichteter Mittelwert der Orte) ruht: $\vec{r} = \dfrac{m_1 \cdot \vec{r}_1 + m_2 \cdot \vec{r}_2}{m_1 + m_2} = \text{const.}$

2.1.2.2 Der Impuls

Die obigen Aussagen motivieren die Einführung einer Kombination aus Masse und Geschwindigkeit, den **Impuls**, der wie die Geschwindigkeit eine gerichtete Größe ist: $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} = m \cdot \dot{\vec{v}} \quad \rightarrow \quad \vec{F} = \dot{\vec{p}}$$

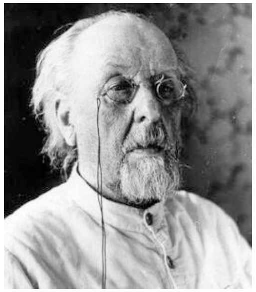
Der Vergleich mit dem 2. Newtonschen Axiom zeigt, dass die Kraft die zeitliche Ableitung des Impulses ist: **Eine Kraft bewirkt eine Änderung des Impulses**.

Ohne äußere Kraft bleibt der Impuls erhalten.

Ohne äußere Kraft ändert sich die Bewegung des Schwerpunkts nicht.

Dies gilt für einzelne Körper, aber auch die den Gesamtimpuls und den Schwerpunkt eines Systems mehrerer Körper. Beispiele:
Zwei Schlitten auf der Luftkissenschiene, Feuerwerkskörper, Teilchen in einem Kollisionsexperiment ...

Beispiel: Astronaut



Konstantin Ziolkowski
(1857 - 1935)

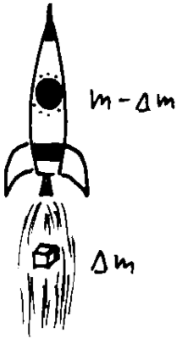
Wenn ein schwereloser Astronaut der Mass M einen Gegenstand der Masse m von sich geworfen hat, entfernen sich beide voneinander, weil der Gesamtimpuls erhalten bleibt (Raketenprinzip). Impulserhaltung, hier eindimensional und im Schwerpunktsystem:

$$M \cdot v_M + m \cdot v_m = 0$$

Beispiel: Rakete

Gesamtimpuls von Treibstoff und restlicher Rakete bleibt erhalten. Die Rechnung ist etwas umständlich, weil sich die Rakete ständig Masse verliert. Das Ergebnis ist die Ziolkowski-Raketengleichung:

$$v(t) = v_r \ln\left(\frac{m_0}{m(t)}\right) + v_0 - g \cdot t$$



Die Rakete steigt senkrecht nach oben, daher $-g \cdot t$
v_r : Relativgeschwindigkeit der ausgestoßenen Gase
v_0 : Anfangsgeschwindigkeit der Rakete
m_0 : Anfangsmasse (Struktur + Nutzlast + Treibstoff)
m : zeitabhängige Restmasse z.B. $m(t) = m_0 - q \cdot t$

Wenn die "zweite kosmische Geschwindigkeit" v_2 = 11,2 km/s (mit der die Gravitation der Erde überwunden wird) erreicht werden soll, dann gilt mit v_r = 4 km/s, Anfangsgeschwindigkeit null und 100 s Brenndauer:

$$11{,}2\,\frac{\text{km}}{\text{s}} = 4\,\frac{\text{km}}{\text{s}} \cdot \ln\left(\frac{m_0}{m(100\,\text{s})}\right) - 9{,}81\,\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 100\,\text{s}$$

$$3{,}05 = \ln\left(\frac{m_0}{m(100\,\text{s})}\right) \quad \rightarrow \quad \frac{m_0}{m(100\,\text{s})} = e^{3{,}05} \approx 21$$

d.h. die Rakete ist am Anfang 21mal (!) schwerer als die Nutzlast+Struktur am Ende (mit längerer Brenndauer wird es noch ungünstiger). Ausweg: Mehrstufige Raketen, bei denen ein Teil der Struktur "geopfert" wird.

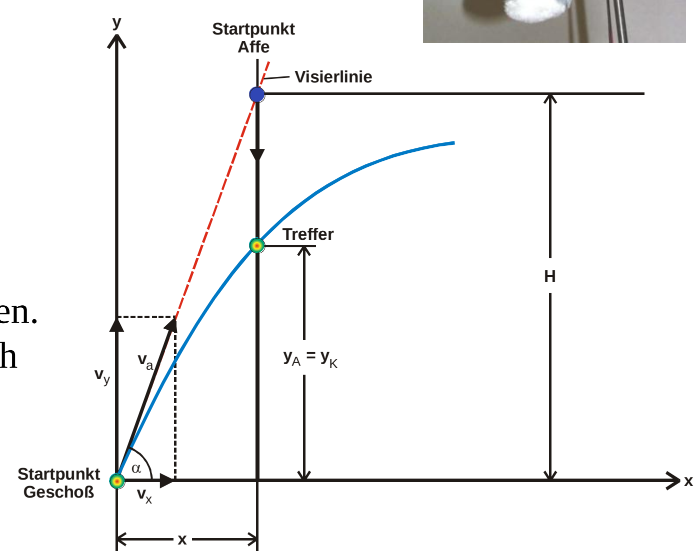
Die Saturn V ist eine dreistufige Rakete, die 1969 bis 1972 für bemannt Mondflüge verwendet wurde (Höhe 111 m, Masse 2935 t)

Experiment: Rakete

Eine unbemannte einstufige Rakete wird durch plötzlich expandierende Luft, die durch eine Düse entweicht, angetrieben. Die Rakete fliegt viel weiter, wenn die Rakete vorher mit ca. 40 cm^3 Wasser gefüllt wird. Das Wasser entweicht mit der expandierenden Luft und erhöht die ausgestoßene Masse und damit den Impuls. Außerdem erweist sich ein Countdown beim Start als hilfreich. Der Countdown wurde aus dramaturgischen Gründen vom Regisseur Fritz Lang für seinen Stummfilm "Die Frau im Mond" (Deutschland 1929) erfunden und hat sich seither in der Raumfahrt bewährt.

Experiment: Der Elefantenschuss

Ein "Gewehr" (Rohr mit Pressluft und Justierlaser) wird auf einen Elefanten ausgerichtet, der auf einem Baum sitzt (in einer früheren Version des Experiments war es ein Affe). Zum Zeitpunkt des Schusses lässt sich der Elefant fallen, um der Kugel zu entgehen, wird aber gerade deshalb getroffen. Grund: Der gleichförmigen Bewegung der Kugel schräg nach oben überlagert sich eine Fallbewegung, die mit der des Elefanten identisch ist (s. Skizze).



2.1.2.3 Erhaltungssätze: Impuls, Energie, Drehimpuls

Der Impuls ändert sich ohne den Einfluss äußerer Kräfte nicht, er ist eine **Erhaltungsgröße**.

Aus der Kombination von Masse und Geschwindigkeit ergibt sich eine weitere wichtige Größe:

2. Newtonsches Axiom $F = m \cdot a = m \cdot \dot{v}$

mit v multipliziert ergibt $F \cdot v = \frac{d}{dt}\left(F \cdot x\right) = m \cdot \dot{v} \cdot v = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2} m \cdot v^2\right)$ $E_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} m \cdot v^2$ **kinetische Energie**

Das Produkt aus Kraft F und Weg x heißt **Arbeit**. Alle Formen von Energie können in Arbeit umgewandelt werden. Energie wird manchmal als "gespeicherte Arbeit" bezeichnet. Energieformen sind z.B. kinetische Energie, potenzielle Energie (Körper entgegen der Gravitation gehoben, Feder zusammengedrückt), Wärme, elektrische Energie, chemische Energie oder Kernenergie.
Für die Summe aller Energieformen in einem abgeschlossenen System gilt der Energieerhaltungssatz: **Die Energie in einem abgeschlossenen System ist eine Erhaltungsgröße**, aber Energieformen können sich ineinander umwandeln. Beispiel: senkrechter Wurf nach oben, kinetische Energie nimmt ab, potenzielle Energie nimmt zu, ihre Summe bleibt konstant.

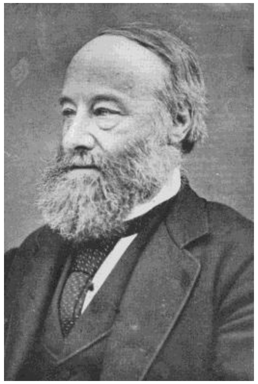
Arbeit (*work*) $W = F \cdot x$

Leistung (*power*) $P = \frac{W}{t}$ Arbeit pro Zeit

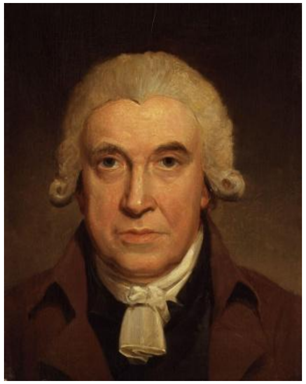
$$[W] = [E] = 1\,\mathrm{N} \cdot \mathrm{m} = 1\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^2}} = 1\,\mathrm{J}\ \ (\text{Joule})$$

$$[P] = 1\,\frac{\mathrm{N\,m}}{\mathrm{s}} = 1\,\frac{\mathrm{kg\,m^2}}{\mathrm{s^3}} = 1\,\frac{\mathrm{J}}{\mathrm{s}} = 1\,\mathrm{W}\ \ (\text{Watt})$$

Bei der "Stromrechnung" bezahlt man nicht den elektrischen Strom, sondern Energie, nämlich die in Anspruch genommene elektrische Leistung (in Watt oder kW) mal der Zeit (in Sekunden oder Stunden). Kilowattstunden (kWh) ist also eine Energieeinheit.



James Prescott Joule (1818 - 1889)



James Watt (1736 - 1819)

Erhaltungssätze können auf fundamentale **Symmetrien** zurückgeführt werden (Noether-Theoreme)

Energieerhaltung ↔ Homogenität der Zeit
Impulserhaltung ↔ Homogenität des Raums
Drehimpulserhaltung ↔ Richtungsinvarianz des Raums

(mehr zum Drehimpuls später)

Emmy Noether
(1882 - 1935)

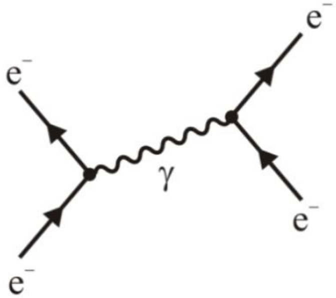
2.1.2.4 Kräfte

Kräfte erkennt man daran, dass sie
- den Bewegungszustand von Körpern ändern
- Körper deformieren (gilt natürlich nicht für Punktmassen)

Kräfte können eine "greifbare" Ursache haben, z.B. Seile, Hebel, Federn oder auch die Druckwirkung von Gasen und Flüssigkeiten. Solche Ursachen gehen alle auf die elektromagnetische Wechselwirkung zurück.

Die Gravitationskraft sowie elektrische und magnetische Anziehung/Abstoßung existiert im "leeren Raum". Für die räumliche Verteilung solcher Kräfte wurde um 1830 von Michael Faraday der Begriff **Kraftfeld** geprägt. Die Vorstellung eines materiellen Mediums ("Äther") als Träger des Kraftfelds wurde Ende des 19. Jahrhunderts experimentell widerlegt, was aber eine geisterhafte "Fernwirkung" nahelegt. Mit der Quantenelektrodynamik und weiteren Feldtheorien entstand die Vorstellung, dass alle Wechselwirkungen von sog. Austauschteilchen vermittelt werden. Die Austauschteilchen der elektromagnetischen Kraft (das Photon) und der Gravitation (das hypothetische Graviton) sind masselos. Diese Kräfte sind dadurch langreichweitig und folgen dem Abstandsgesetz

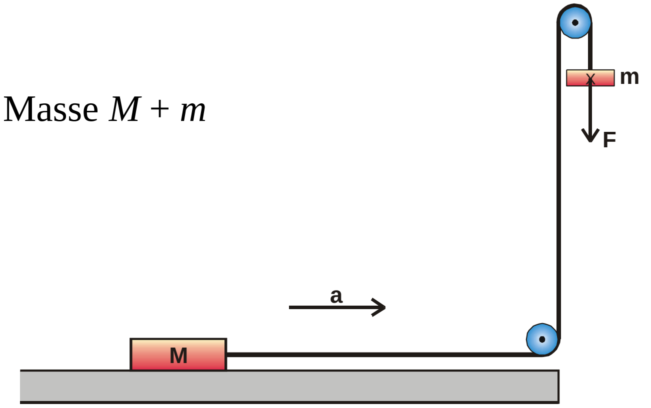
$$F(r) \propto \frac{1}{r^2}$$



Experiment: Attwoodsche Fallmaschine

Die Gewichtskraft der Masse m beschleunigt beschleunigt die Masse $M + m$

$$F = m \cdot g = (M + m) \cdot a \quad \rightarrow \quad a = g \frac{m}{M + m}$$



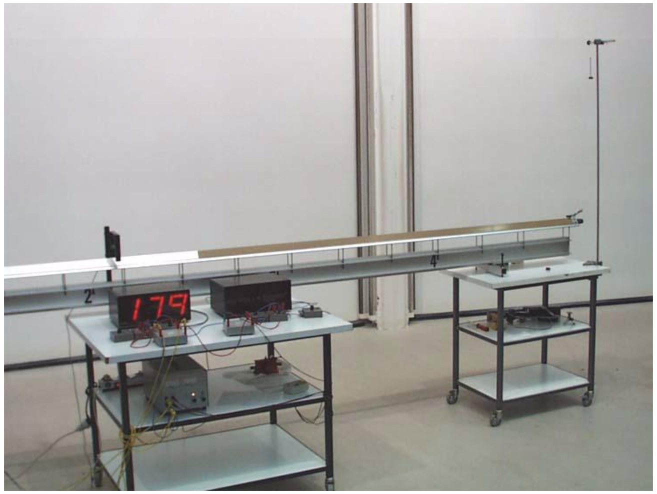
Die Fallbewegung ist somit viel langsamer als beim freien Fall. Die Beschleunigung ist die gleiche, wenn sowohl die Masse m als auch die Masse M verdoppelt werden. Die Experimente bestätgen:

$$F \propto m$$

$$F \propto a$$

Experiment: actio = reactio

Zwei Schlitten gleicher Masse auf der Luftkissenschiene stoßen sich über Blattfedern ab. Sie entfernen sich mit entgegengesetzt gleicher Geschwindigkeit. Die Summe beider Impulse bleibt null, der gemeinsame Schwerpunkt bleibt erhalten.



Experiment: Elastische Stöße

Ein nach rechts bewegter Schlitten A stößt mit Geschwindigkeit v_0 auf einen ruhenden Schlitten B.

$M_A = M_B$: A bleibt stehen, B bewegt sich mit v_0 nach rechts

$M_A > M_B$: Beide Schlitten bewegen sich mit $v < v_0$ nach rechts, A langsamer als B

$M_A < M_B$: Beide Schlitten bewegen sich mit $v < v_0$, und zwar B nach rechts, nach links.

(mehr zu elastischen Stößen später)

2.1.2.5 Gravitationskraft

1) Im erdnahen Bereich:

An der Erdoberfläche beträgt die Gravitationsbeschleunigung ca. g = 9,81 m/s^2 (mit leichten Variationen). Sie kann für Vorgänge auf der Erde als konstant angenommen werden (homogenes Gravitationsfeld), obwohl sie streng genommen von der Entfernung zum Erdmittelpunkt abhängt (pro Meter $\Delta g \approx 3 \cdot 10^{-6}$ m/s^2).

Gewichtskraft einer Masse m: $F = m \cdot g$ (1 kg "wiegt" auf der Erde 9,81 N, auf dem Mond 1,62 N)

Die Trägheit eines Körpers ist durch seine "träge Masse" m_t gegeben, die Gravitationskraft aber durch seine "schwere Masse" m_s. Das könnten zwei verschiedene Eigenschaften von Materie sein. Alle bisherigen Messungen deuten aber auf $m_t = m_s = m$ hin, wie es das sog. Äquivalenzprinzip fordert.
Folge: Alle Körper "fallen gleich schnell" (auch auf anderen Himmelskörpern).

Potenzielle Energie im homogenen Gravitationsfeld:

$E_{pot} = m \cdot g \cdot h$ (Höhenunterschied h, geleistete Arbeit = Kraft × Weg)

Die freiwerdende Kraft ist nach unten gerichtet: $F = -m \cdot g$

Beispiel: Wurf nach oben

Vulkan Stromboli: Höhe der Flugbahnen bis h = 150 m. Mit welcher senkrechten Geschwindigkeitskomponente wird das Material ausgestoßen?

Max. potenzielle Energie = kinetische Energie beim Ausstoß

$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m v^2 \quad \rightarrow \quad v^2 = 2 \cdot g \cdot h$$

$$v^2 = 2 \cdot 9{,}81\,\text{m/s}^2 \cdot 150\,\text{m} = 2943\ \text{m}^2/\text{s}^2$$

$$v = 54{,}2\,\text{m/s} = 195\,\text{km/h}$$

Eruption am Vulkan Stromboli, eine der Liparischen Inseln in Süditalien. Die Flugbahnen der glühenden Steine sind in diesem Bild bis zu 150 m hoch.

2) Gravitation allgemein:

Die **Gravitationskraft** ist proportional zu beiden beteiligten Massen *M* und *m* sowie umgekehrt proportional zum Abstand zum Quadrat:

$$\vec{F}_{\mathrm{G}} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r^2} \vec{e}_r \qquad \text{mit} \qquad \text{Gravitationskonstante } G = (6{,}6741 \pm 0{,}0003) \cdot 10^{-11} \frac{\mathrm{m}^3}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^2}$$

Das Minuszeichen beschreibt, dass die Kraft dem Einheitsvektor in *r*-Richtung entgegen gerichtet ist. Dadurch ist auch das Potenzial (s. weiter unten) negativ.

Astronaut David Scott (Apollo 15) lässt auf dem Mond einen Hammer und eine Feder fallen. Im Vakuum fallen beide Körper gleich schnell.

Potenzielle Energie:

Die Verallgemeinerung von Kraft × Weg ist (*F* variabel und 3-dim.)

$$W = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_a \cdot d\vec{r}$$ geleistete Arbeit zwischen zwei Punkten P_1 und P_2.

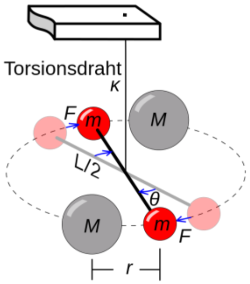
Bei einem "konservativen" Kraftfeld ist die geleistete Arbeit zwischen zwei Punkten unabhängig vom Weg. Auf einem geschlossenen Weg gilt

$$W_{12} + W_{21} = \int_{P_1}^{P_2} \vec{F}_{\mathrm{a}} \cdot dr + \int_{P_2}^{P_1} \vec{F}_{\mathrm{a}} \cdot dr = \oint \vec{F}_{\mathrm{a}} \cdot dr = 0$$

Umgekehrt ergibt sich die frei werdende Kraft als Gradient der pot. Energie

$$\vec{F} = -\vec{\nabla} E_{\mathrm{pot}} = -\left(\frac{dE_{\mathrm{pot}}}{\mathrm{dx}} + \frac{dE_{\mathrm{pot}}}{\mathrm{dx}} + \frac{dE_{\mathrm{pot}}}{\mathrm{dx}} \right)$$

Was bedeutet das Minuszeichen? Üblicherweise betrachtet man die potenzielle Energie als geleistete Arbeit mal Weg. Die hierzu angewandte äußere Kraft F_{a} , die "bergauf" zeigt, ist der frei werdenden Kraft, die "bergab" zeigt, entgegen gerichtet: $\vec{F}_a = -\vec{F}$



Gravitationsdrehwaage: Je eine große und eine kleine Kugel ziehen sich an, wobei im Wesentlichen die kleinen Kugeln an den Enden einer drehbaren Stange beschleunigt werden. Die Drehbewegung wird über einen Spiegel mit einem Laserstrahl angezeigt.

Der Nullpunkt der potenziellen Energie kann willkürlich gewählt werden. Bei der Gravitation ist es sinnvoll, ihn ins Unendliche zu legen. Bei Gravitationsgesetz steht vor der Kraft ein Minuszeichen. Die äußere Kraft F_a der aufgewandten Arbeit hat das entgegengesetzte Vorzeichen (+):

$$W = E_{pot} = \int_{\infty}^{P} \vec{F}_a \cdot d\vec{r} = \int_{\infty}^{P} G \cdot \frac{M \cdot m}{\hat{r}^2} \cdot d\hat{r} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{\hat{r}} \Bigg|_{\infty}^{r} = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r} + 0 = -G \cdot \frac{M \cdot m}{r}$$

Man definiert das **Gravitationspotenzial** der Erde (potenzielle Energie <u>pro Einheitsmasse</u>)

$$V(r) = -G \cdot \frac{M_E}{r}$$

2.1.2.6 Kraft einer Feder

In guter Näherung gilt für eine Feder, dass die rücktreibende Kraft proportional zur Auslenkung ist:

$F = -D \cdot x$ **Hookesches Gesetz** D: Federkonstante $[D]$=1 N/m

Die durch eine äußere Kraft geleistete Arbeit bei der Dehnung der Feder ist

$$W = \int_0^x F_a(\hat{x}) \cdot d\hat{x} = \int_0^x D \cdot \hat{x} \cdot dx = \frac{1}{2} D \cdot \hat{x}^2 \Bigg|_0^x = \frac{1}{2} D \cdot x^2$$

Das Hookesche Gesetz spielt eine besondere Rolle in der Physik, weil es mit einer "harmonischen" (sinusförmigen) Schwingung verknüpft ist:

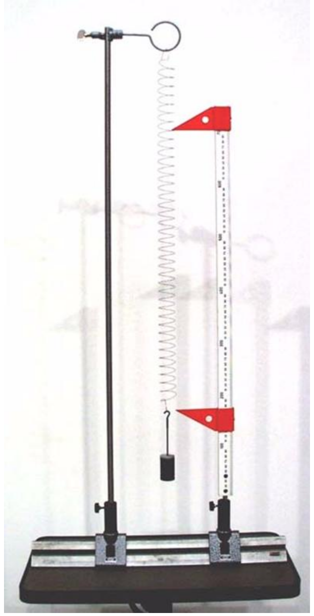
$$F = m \cdot \ddot{x} = -D \cdot x \qquad \ddot{x} + \frac{D}{m} x = 0$$

$$x(t) = A \cdot \sin(\omega \cdot t) \quad \text{mit} \quad \omega = \sqrt{\frac{D}{m}}$$

$$\ddot{x}(t) = -A \cdot \frac{D}{m} \cdot \sin(\omega \cdot t)$$

Dies ist eine **Differenzialgleichung**, in der x und seine zweite Ableitung vorkommt. Die Funktion $x(t)$ ist eine **Lösung** dieser Gleichung, d.h. die Gleichung ist erfüllt, wenn man die Lösung einsetzt.

Sehr viele Schwingungsphänomene können (näherungsweise) als harmonisch betrachtet werden - mehr dazu später.



Eigentlich müsste man die Gravitationskraft für jedes infinitesimale Massenelement der Erdkugel hinschreiben und über alle Elemente integrieren. Es zeigt sich aber (ohne Beweis):

1) Außerhalb des Erdradius R_E wirkt die Kraft, als ob die Masse der Erde in ihrem Mittelpunkt vereinigt sei.

2) Innerhalb der Erde (Abstand r zum Erdmittelpunkt) wirkt die Masse innerhalb des Radius r, als ob sie im Mittelpunkt vereinigt sei. Anteile außerhalb des Radius r heben sich auf, solange die Massenverteilung kugelsymmetrisch ist. In der (sehr groben) Näherung der Erde als homogene Kugel gilt:

$$r \geq R_E \qquad F = G \cdot \frac{M_E \cdot m}{r^2}$$

$$r < R_E \qquad F = G \cdot \frac{M_E \cdot m}{r^2} \cdot \left(\frac{r}{R_E}\right)^3 = G \cdot \frac{M_E \cdot m}{R_E^3} \cdot r$$